Transzformációk a síkban

Robosztus számítási módszerek

A javasolt számítási módszer

Implementáció

Gyakorlati alkalmazási lehetőségek

Módszerek transzformációs paraméterek robosztus meghatározására és alkalmazási lehetőségeik

GISopen 2021 konferencia

Nagy Gábor

ÓE AMK GEO

2021.08.26

Transzformációk a síkban lineáris összefüggésekkel

- affin transzformáció: általános lineáris transzformáció

$$Y = Y_0 + ay + bx$$

$$X = X_0 + cy + dx$$

- Helmert transzformáció: egy olyan affin transzformáció, ahol $d = a$ és $c = -b$

$$Y = Y_0 + ay + bx = Y_0 + m\cos(\alpha)y + m\sin(\alpha)x$$

$$X = X_0 - by + ax = X_0 - m\sin(\alpha)y + m\cos(\alpha)x$$

- egybevágósági transzformáció: egy olyan Helmert transzformáció, ahol $a^2 + b^2 = 1$, vagyis $m = 1$

$$Y = Y_0 + \cos(\alpha)y + \sin(\alpha)x$$

$$X = X_0 - \sin(\alpha)y + \cos(\alpha)x$$

A transzformációk paramétereinek száma

- affin transzformáció: 6
  - Y_0, X_0, a, b, c, d
  - három egymástól független paraméter koordinátánként
- Helmert transzformáció: 4
  - Y_0, X_0, a, b
  - vagy Y_0, X_0, α, m
  - két eltolás, egy forgatás, egy nagyítás
- egybevágósági transzformáció: 3
  - Y_0, X_0, α
  - két eltolás, egy forgatás

Egy transzformáció paramétereinek számítása

- mindkét rendszerben ismert pontok segítségével
- a transzformáció egyenleteiben ilyenkor a paraméterek lesznek az ismeretlenek
- pontonként két egyenlethez jutunk így
- az egyenletrendszer megoldásához a paraméterek számával megegyező számú egyenlet szükséges
- a minimálisan szükséges közös pontok száma így:
  - affin transzformáció esetén 3
  - Helmert transzformáció esetén 2
  - egybevágósági transzformáció esetén 2 (és ez már fölös mérést is tartalmaz)
- a gyakorlatban mindig vannak fölös mérések is, a paramétereket általában legkisebb négyzetek módszerével határozzuk meg

A legkisebb négyzetek módszerének korlátai

- A mérés nem tartalmazhat durva hibát,
- mert az a kiegyenlített paraméterekre is durva hatással van, még nagyon sok fölös mérés mellett is.
- Azokat a számítási módszereket hívjuk robusztus számításoknak, amelyek az ilyen esetekben is elfogadható eredményt adnak.

Egy egyszerű példa robosztus számításra

Egy mennyiségre végzett közvetlen méréssel

- a mérések eredményei: 1.012, 1.008, 10.250, 1.002, 0.9998, 10.007, 0.9993, 0.9988, 1.003, 0.9990
- ezekből durva hiba a 10.250 és a 10.007
- a mérések számtani közepe: 2.83419
- a mérések mediánja: 1.001
- a mérések számtani közepe a durva hibák kihagyásával: 1.0027

Lehetőségek robosztus számításra affin transzformáció esetén

- a két koordináta számítása egymástól független lineáris összefüggésekkel történhet
- bármilyen a regressziós sík robusztus számítására alkalmas módszer megfelelő lehet:
  - RANSAC (Random Sample Consensus)
  - SBLR (Sector Based Linear Regression)
- Helmert transzformáció estén a fentiek nem működnek, mert két paraméter (a, b) mindkét koordináta egyenletében szerepel.

Módszerek transzformációs paraméterek robosztus meghatározására és alkalmazási lehetőségeik

Nagy Gábor

Transzformációk a síkban

Robosztus számítási módszerek

A javasolt számítási módszer

Implementáció

Gyakorlati alkalmazási lehetőségek

- rendelkezésünkre áll a szükségesnél jóval több mindkét rendszerben ismert pont
- ezek közül bármely kettőből számíthatjuk a Helmert transzformáció paramétereit
- az a és b paraméterekből számítható a forgatás (α) és a nagyítás (m)
- minden lehetséges kombinációban elvégezve a fentieket, vehetjük a forgatások és a nagyítások mediánját
- ezeket a medián értékeket véglegesnek véve, a mediánt használva számíthatjuk az Y_0 és X_0 értékét

A számítás fontos részletei

- célszerű az értékeket a pontok közötti távolsággal súlyozni, hogy kifejezzük az egymáshoz közeli pontokból levezetett értékek bizonytalanságát
- de a (nagyon) durva hibák esetén ez nem lenne célszerű, mert az ilyen pontokat tartalmazó pontpároknál a távolság nagyon nagy is lehet
- a megoldás:
  - vesszük a távolságok mediánját
  - ez lesz a súlyok maximuma a forgatás és a nagyítás számítása során

A transzformációs paraméterek meghatározásának számításigénye

- ha n darab közös pontból akarjuk meghatározni a transzformációs paramétereket, akkor az $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2-n}{2}$ párosítást jelent
- ezáltal a művelet számításigénye a pontok számának második hatványával (négyzetesen) növekszik
- a geodéziai gyakorlatban ez még nem jelent problémát
- nagyon sok pont esetén a RANSAC-hoz hasonló véletlenszerű mintavételezés is megvalósítható

A számítás implementációja

- Python modul formájában
- a tesztelést végző programok is ezt használják
- nyílt forráskódú, letölthető a GitHubról:

https://github.com/ngabor/helmert2d

Szimulációs vizsgálatok

Egymillió véletlenszerűen generalt minta minden esetre, ahol a pontok száma $5 \leq n \leq 19$, a potok adatai σ szórású, normáis eloszlású hibát tartalmaznak és van közöttük o darab durva hibás pont is.

A maximális durva hibák száma, ahol még 3σ alatti eltérés érhető el az esetek legalább 99.999 százalékában:

control points	max. o
5	0
6	0
7	0
8	1
9	1
10	1
11	1

control points	max. o
12	2
13	2
14	2
15	2
16	3
17	3
18	3
19	4

Szimulációs vizsgálatok

Ha megelégszünk az esetek 99 százalékával:

control points	max. o
5	0
6	1
7	1
8	1
9	1
10	2
11	2

control points	max. o
12	3
13	3
14	3
15	4
16	4
17	5
18	5
19	5

Gyakorlati alkalmazási lehetőségek

- Alkalmazási területek:
  - (potenciálisan) durva hibát is tartalmazó adatok automatikus feldolgozása
  - objektív módszer durva hibát is tartalmazó adatok feldolgozására
- Alkalmazási lehetőségek:
  - önálló programként
  - összetett programokba építve