

PROKRUSZTÉSZ MÓDSZER A GEODÉZIÁBAN

PAPP ERIK

***SZENT ISTVÁN EGYETEM
YBL MIKLÓS ÉPÍTÉSTUDOMÁNYI KAR
BUDAPEST***

TÉMAKÖRÖK

1. Bevezetés
2. Ki volt Prokrusztész
3. Prokrusztész módszer
7-paraméteres
transzformáció
9-paraméteres
transzformáció
4. TH és TA programok
5. Összefoglalás

***Navigare necesse est. – Hajózni szükséges.
– Hajózni muszáj***

***Transzformálni szükséges
Transzformálni muszáj***

***“Everything should be made as simple as possible,
but no simpler.”***

Albert Einstein

Bevezetés

- ***A hagyományos földi és GPS módszerrel meghatározott hálózatok közötti torzulások következtében a 7-paraméteres hasonlósági transzformációk néhány esetben nem biztosítanak megfelelő pontosságot.***
- ***Például GPS koordinátákat transzformálva EOVI vetületi rendszerbe, a hasonlósági transzformációval maximum 0,5 méteres maradék ellentmondást kapunk (Papp és Szűcs 2005).***
- ***A maradék ellentmondások csökkentése céljából, több paraméteres transzformációs modelleket kell alkalmaznunk.***

Bevezetés

- ***A 9-paraméteres affin transzformáció nem csak logikus kiterjesztése, hanem egyben általánosítása is a 7-paraméteres transzformációs modellnek.***
- ***Az affin transzformáció a Helmert transzformáció módosítása, amikor egyetlen méretarány helyett, három méretarányt alkalmazunk a megfelelő koordináta tengelyek irányában.***
- ***Abban az esetben, ha a három méretarány azonos, a modell visszaváltozik hasonlósági transzformációvá.***

Bevezetés

- **A 9-paraméteres transzformáció megoldásával sok tanulmány foglalkozott és napjainkban is az érdeklődés középpontjában áll.**
 - Späth (2004) **numerikus, minimalizálási technikát** alkalmazott,
 - Papp és Szűcs (2005) **linearizált legkisebb négyzetek módszerét** alkalmazták
 - Wattson (2006) **Gauss-Newton módszert** használt.
- **A GPS felhasználók igényeinek és kívánságainak megfelelően a 9-paraméteres transzformáció **néhány geodéziai programcsomagban szintén megtalálható.****
- **3D affin transzformáció 9 paraméterének meghatározásához, minimum 3 mindkét rendszerben ismert koordinátájú közös pont szükséges.**
- **Azonban a geodéziában és a térinformatikában, általában $n > 3$ közös pont áll rendelkezésre.**

Bevezetés

A **9-paraméteres affin transzformáció** a következők szerint definiálható:

- **három méretarány meghatározása** az X , Y és Z irányban,

$$\left(\text{diag} \{S\} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \right)$$

- **három forgatási paraméter meghatározása**, és

$$\left(R \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \right)$$

- **három eltolás meghatározása**.

$$\left(T \in \mathbb{R}^{3 \times 1} \right)$$

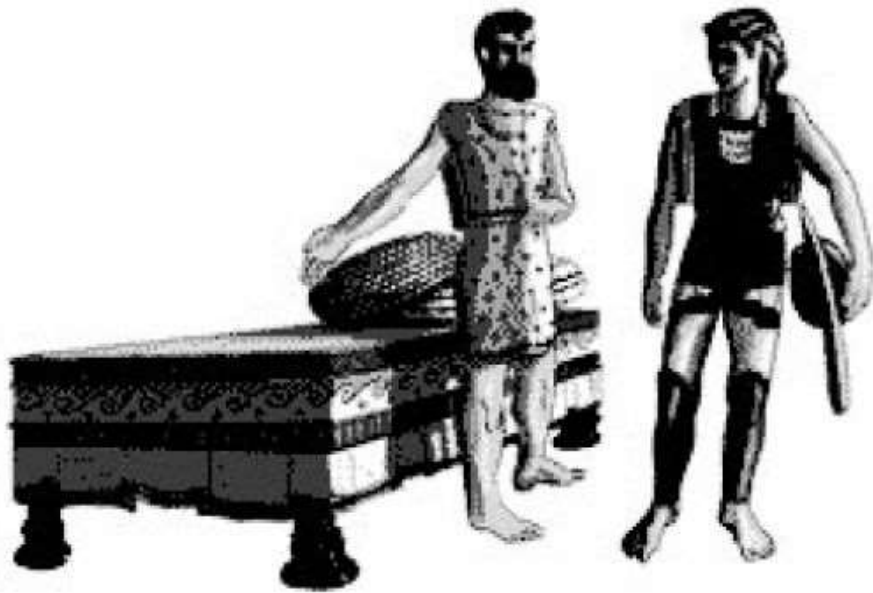
Bevezetés

- *Ez tulajdonképpen a 7-parméteres tarnszformáció kiterjesztése (Bursa 1962, Wolf 1963), ahol a méretarányokat az X, Y és Z tengelyek irányában határozzuk meg, a szokásos egyetlen méretarány helyett.*
- *Ebben az előadásban bemutatjuk a dátum transzformáció megoldását Prokrusztész módszerrel.*

Ki volt Prokrusztész

- *A név és a fogalom eredete is az ókori Görögországból származik.*
- *Prokrusztész (ógörögül: Προκρούστης – Prokrusztész, latinul: Procrustes) a görög mitológiában Poszeidón fia, híres rabló az Athénből Elefszinába vezető úton. Polüpermón és Damasztész néven is ismerik.*
- *Nevét „kinyújtó” arról a szokásáról kapta, hogy az arra járó utasokat házába invitálta, majd ágyába fektette, s ha annál rövidebbek voltak, kegyetlenül kinyújtotta őket, a túl hosszú vendégnek pedig, levágott egy darabot a lábából.*
- *Thészeusz a fiatal Atticai hős, akinek feladata a rablók kiiktatása volt győzte le, és ölte meg a saját módszerével: levágott belőle, hogy beférjen az ágyába.*

Ki volt Prokrusztész



Prokrusztész és mágikus ágya



Thészeusz és Prokrusztész, ókori görög, amfóra, Kr. e. 470–460 körül

Ki volt Prokrusztész

- *Prokrusztész mágikus ágyával kapcsolatban terjedt el a következő könnyörtelen mondás*
- *„erőltetni valakit vagy valamit egy természetellenes formába vagy sémába”.*
- *A Prokrusztész jelző, a lehető legjobban illeszkedő megoldást biztosító eljárás megnevezésére használatos napjainkban.*

Prokrusztész módszer

- **Prokrusztész transzformáció:** amely csak az eltolás a méretarány változtatás és az elforgatás kombinációjával transzformál egy alakzatot oly módon, hogy az a lehető legjobban illeszkedjen egy másik alakzatba.
- **Ortogonalis Prokrusztész transzformáció:** csak az ún. merev test transzformáció megengedett, méretarány változtatás vagy eltolás nélkül.

7-paraméteres transzformáció

- ***Tekintsük az n pontból álló $A \in \mathbf{R}^{n \times m}$ és $B \in \mathbf{R}^{n \times m}$ koordináta rendszereket az m -dimenziós Euklideszi térben.***
- ***Az A és B terek adatai az alábbi formában adhatók meg***

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & z_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ X_n & Y_n & Z_n \end{bmatrix}. \quad (1)$$

7-paraméteres transzformáció

- *A 7-paraméteres hasonlósági vagy ismertebb nevén Helmert transzformáció a következők szerint definiálható*

$$A = BRs + vT^T \quad (2)$$

ahol az

- $R \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ *egy ortonormál forgatási mátrix, amely kielégíti az ortogonalitási feltételt,*
- $s \in \mathbb{R}$ *a méretarány vagy más néven kitágítás,*
- $T \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ *az eltolás vektor és v egy n hosszúságú vektor.*

7-paraméteres transzformáció

- **A 7-paraméteres transzformáció ezek után megoldható a 7 transzformációs paraméter meghatározásával, úgymint:**
- **$s \in \mathbb{R}$ méretarány,**
- **$R \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ 3 forgatás és**
- **$T \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ 3 eltolási paraméter meghatározása.**
- **Különböző megoldások találhatók a szakirodalomban a 7-paraméteres transzformáció megoldására, mint például Vanícek és Steeves (1996), Yang (1999), Awange és Grafarend (2003, 2005), Shen et al. (2006), Prosková (2011, 2012), Zeng és Yi (2011), Walker et al. (1991), Papp és Szűcs (2005).**

9-paraméteres transzformáció

- **A 9-paraméteres affin transzformáció a következők szerint definiálható**

$$\mathbf{A} = \mathbf{BRS} + \mathbf{vT}^T \quad (3)$$

- ahol az $\mathbf{S} \in \mathbb{R}$ méretarány paramétert (2. egyenlet) egy $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ diagonálmátrixal helyettesítjük, amely a következő alakú

$$\mathbf{S} = \langle \mathbf{S}_x \ \mathbf{S}_y \ \mathbf{S}_z \rangle = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_x & & \\ & \mathbf{S}_y & \\ & & \mathbf{S}_z \end{bmatrix}. \quad (4)$$

$\mathbf{S}_x \ \mathbf{S}_y \ \mathbf{S}_z$ jelöli az X, Y, Z tengely irányú méretarányokat.

9-paraméteres transzformáció

- *A (2) egyenlet megoldásával szemben a (3) egyenlet esetében 9 transzformációs paramétert kell meghatároznunk:*
- *3 méretarány* $S \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$,
- *3 forgatás* $R \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ és
- *3 eltolási paramétert* $T \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$.

Az (1)-(3) egyenletekben legyen $a_i = [x_i \ y_i \ z_i]$ és $b_i = [X_i \ Y_i \ Z_i]$.

9-paraméteres transzformáció

- **Azért, hogy az optimális 9-transzformációs paramétert, a méretarányt $\text{diag}\{S\} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ a forgatást $R \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ és az eltolást $T \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ meghatározzuk, a Frobenius norma minimum kell legyen,**
- **vagyis az $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ és $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ koordináta rendszerekben lévő pontok távolságnégyzet összegének minimumnak kell lennie.**

$$D^2 = \sum_{i=1}^n (a_i - b_i RS - T)^T (a_i - b_i RS - T) . \quad (5)$$

9-paraméteres transzformáció

Optimális forgatási mátrix meghatározása

- A következőkben bemutatjuk, hogyan határozhatjuk meg a forgatási mátrixot, ortogonális Prokrusztrész módszerrel, csupán a két koordináta rendszerben adott közös pontok koordinátáinak a felhasználásával, **linearizálás, iteráció és a kezdő értékek közelítő ismerete nélkül.**
- Jelölje a_0 és b_0 a két koordináta rendszer súlypontját és n a közös pontok számát.

$$a_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \quad , \quad b_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n b_i \quad . \quad (6)$$

9-paraméteres transzformáció

- **Legyen az $a_0 = b_0 = 0$. Az $R \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ megoldása koordinátákból számítható, függetlenül a méretarány és eltolás paramétereiktől (Garfarend és Awange 2003, Wattson 2006), a (3) egyenlet kifejezhető, mint**

$$A = BR \quad , \quad (7)$$

- **amely az R forgatási mátrix kvadratikus kényszerének és az ortogonalitási feltétel függvénye (Garfarend és Awange 2003)**

$$R^T R = I_3 \quad \bullet \quad (8)$$

9-paraméteres transzformáció

- Az $R \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ **3x3 ortonormál mátrix** a (7) egyenlet legkisebb négyzetek szerinti megoldása, a (8) egyenletben szereplő feltétel teljesülése mellett, de csak abban az esetben, ha teljesül a (9) nemlineáris normálegyenlet rendszer

$$\mathbf{B}^T \mathbf{B} \mathbf{R} + \mathbf{R} \mathbf{\Lambda} = \mathbf{B}^T \mathbf{A} , \quad (9)$$

- ahol $\mathbf{\Lambda}$ a Lagrange szorzó **3x3 szimmetrikus mátrix** (Grafarend és Awange 2000). A $\mathbf{B}^T \mathbf{A}$ mátrix szorzat megadható **singular value decomposition (SVD)** eljárással a következők szerint

$$\mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A} . \quad (10)$$

Az \mathbf{U} és \mathbf{V} **3 x 3 ortonormál mátrixok** oszlopai a baloldali a jobboldali sajátvektorok, $\mathbf{\Sigma}$ pedig a 3 szinguláris értékeket tartalmazó **diagonál mátrix**.

9-paraméteres transzformáció

- *A nemlineáris normálegyenlet rendszert az **SVD** felhasználásával megoldva megkapjuk a keresett **R** forgatási mátrixot a (11) egyenletből*

$$\mathbf{R} = \mathbf{U} \mathbf{V}^T, \quad (11)$$

amely eredmény egyértelmű és egyedüli megoldás abban az esetben, ha a (10) egyenlet bal oldalán található mátrixszorzat rangja egyenlő vagy nagyobb, mint 3 (Grafarend és Awange 2000).

- *A forgatás kvaternióval vagy kettős kvaternióval sokkal egyszerűbben megadható és szükség esetén ezekből az **R** forgatási mátrix meghatározható, hiszen egy 4 elemű vektorral gyorsabb és könnyebb szorozni, mint egy 9 elemű mátrixal, Hamilton (1844, 1853), Horn (1987), Papp (2013, 2015, 2017), Prosková (2011, 2012), Shen (2010), Wang et al. (2014), Walker et al. (1991).*

9-paraméteres transzformáció

Optimális méretarány meghatározása

- Feltételezve, hogy az $a_0 = b_0 = 0$, akkor a (3) egyenlet az alábbi alakú lesz

$$\mathbf{A} = \mathbf{BRS} \quad . \quad (12)$$

- Legyen \mathbf{f} az a hibafüggvény, amely magában foglalja a \mathbf{B} rendszer \mathbf{A} rendszerbe történő elforgatását és méretarány változtatását

$$\mathbf{f} = \left(\mathbf{A} - \mathbf{BRS} \right)^T \left(\mathbf{A} - \mathbf{BRS} \right) \quad , \quad (13)$$

- ahol \mathbf{f} egy 3×3 mátrix. Frobenius normát alkalmazunk a hibafüggvényre a két azonos pont közötti távolság minimalizálásához és ezt a normát, minimalizáljuk (Fitzpatrick és West 2001).

9-paraméteres transzformáció

$$\|\mathbf{f}\|^2 = \text{tr}(\mathbf{A} - \mathbf{BRS})^T (\mathbf{A} - \mathbf{BRS}) := \min . \quad (14)$$

- **Az optimális, legkisebb négyzetek szerinti megoldása az $S \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ az $\|\mathbf{f}\|^2$ minimalizálásával határozható meg. A részletes levezetés és bizonyítás megtalálható Grafarend és Shaffrin (1993) munkájában.**
- **Jelöljük az A , B és R mátrixokat az alábbiak szerint**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ \dots & & \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ \dots & & \\ r_{n1} & r_{n2} & r_{n3} \end{bmatrix}. \quad (15)$$

9-paraméteres transzformáció

- Az s_j **méretarány paraméterek** a (16) egyenlet alapján számíthatók. A megoldás részletes levezetése és bizonyítása megtalálható Awange et al. (2008) tanulmányában.

$$\left\{ \frac{\partial \|\mathbf{f}\|^2}{\partial \mathbf{S}} \right\}_{jj} = 0 \Leftrightarrow s_j = \frac{\sum_{l=1}^n \left(\sum_{k=1}^3 b_{lk} r_{kj} \right) a_{lj}}{\sum_{l=1}^n \left(\sum_{k=1}^3 b_{lk} r_{kj} \right)^2}, \quad j \in \{1, 2, 3\}. \quad (16)$$

9-paraméteres transzformáció

Optimális eltolás meghatározása

- A 3 **eltolási paraméter** vektor, súlyponti koordináták felhasználásával a (17) egyenletből számíthatók

$$\mathbf{T} = \mathbf{a}_0 - \mathbf{b}_0 \mathbf{R} \mathbf{S} \quad . \quad (17)$$

- A megoldás részletes levezetése és bizonyítása megtalálható Awange et al. (2008) tanulmányában.

9-paraméteres transzformáció

A Prokrusztész módszer alkalmazásán alapuló dátum transzformációs algoritmus megoldása az alábbiak szerint foglalható össze:

1. **Input adatok a mindkét rendszerben adott n darab közös pont a_i és b_i koordinátái, $i=1\dots n$.**
2. **A súlypontra vonatkozó $\Delta a_i, \Delta b_i$ koordináták számítása**

$$\Delta a_i = a_i - a_0 \quad , \quad \Delta b_i = b_i - b_0 \quad (18)$$

3. **A $B^T A$ mátrix szorzat számítása SVD módszerrel (10) egyenlet. Az R forgatási mátrix számítása (11) egyenlet és a forgásszögek meghatározása (19) egyenlet.**
4. **Ezután az S méretarány paraméterek számítása következik (16) egyenlet.**
5. **Végül a T eltolások vektorát számítjuk (17) egyenlet.**

9-paraméteres transzformáció

- **A forgásszögek, az R forgatási mátrix elemeiből számíthatók**

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}, \quad \alpha_X = \arctg\left(\frac{r_{23}}{r_{33}}\right), \quad \beta_Y = \arcsin(-r_{13}), \quad \gamma_Z = \arctg\left(\frac{r_{12}}{r_{11}}\right),$$

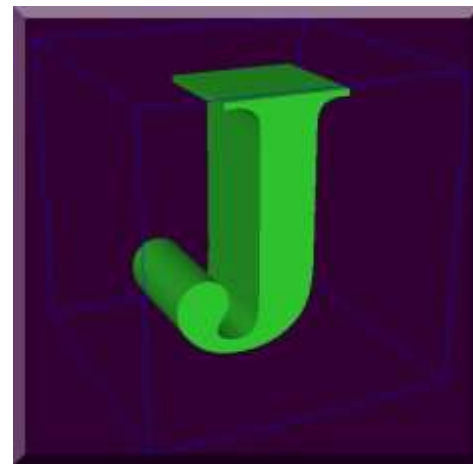
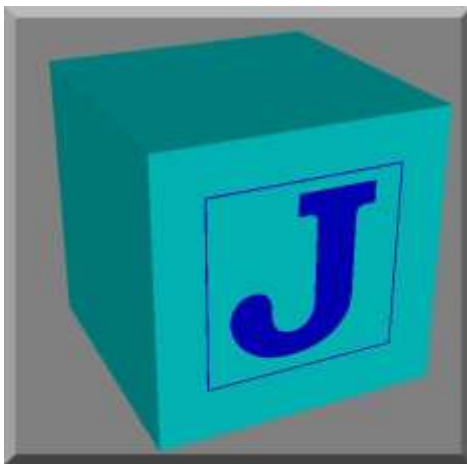
(19)

ahol α , β és γ az X, Y és Z tengelyek körüli forgásszögeket jelölik.

TH és TA programok

Abból a célból, hogy bemutassuk a (10), (11), (16), (17) és (19) összefüggések érvényességét megismételtük Grafarend és Avange (2003) továbbá Wang at al. (2014) számításait.

Az eredmények teljes egyezést mutatnak úgy a transzformációs paraméterek mind pedig, a transzformált koordináták és maradék ellentmondások tekintetében.



TH és TA programok



J

TH és TA programok

J

Grafarend és Avange (2003) 7 pontos példa fájlból

Coordinate pairs extracted from the local and WGS84 coordinate systems.

Site	Local coordinate system (System A)			WGS84 coordinate system (System B)		
	x	y	z	X	Y	Z
Solitude	4157222.543	664789.307	4774952.099	4157870.237	664818.678	4775416.524
Buoch Zeil	4149043.336	688836.443	4778632.188	4149691.049	688865.785	4779096.588
Hohenneuffen	4172803.511	690340.078	4758129.701	4173451.354	690369.375	4758594.075
Kuehlenberg	4177148.376	642997.635	4760764.800	4177796.064	643026.700	4761228.899
Ex Mergelaec	4137012.190	671808.029	4791128.215	4137659.549	671837.337	4791592.531
Ex Hof Asperg	4146292.729	666952.887	4783859.856	4146940.228	666982.151	4784324.099
Ex Kaisersbach	4138759.902	702670.738	4785552.196	4139407.506	702700.227	4786016.645

KOORDINÁTA JEGYZÉK

Solitude	4157222.543	664789.307	4774952.099	4157870.237	664818.678	4775416.524
Bouch Zeil	4149043.336	688836.443	4778632.188	4149691.049	688865.785	4779096.588
Hohenneuffen	4172803.511	690340.078	4758129.701	4173451.354	690369.375	4758594.075
Kuehlenberg	4177148.376	642997.635	4760764.800	4177796.064	643026.700	4761228.899
Ex Mergelaec	4137012.190	671808.029	4791128.215	4137659.549	671837.337	4791592.531
Ex Hof Asperg	4146292.729	666952.887	4783859.856	4146940.228	666982.151	4784324.099
Ex Kaisersbach	4138759.902	702670.738	4785552.196	4139407.506	702700.227	4786016.645

n = 7 közös pont

Térbeli HELMERT transzformáció

J

TH és TA programok

J

BTA mátrix

```
1504620685.3458474 _859435278.5454756 _1168319018.5270505
_859446605.32305336 2394155331.7202301 412839954.74167418
_1168314569.4225461 412846752.10195196 941224795.54468298
```

singular value decomposition (SVD), baloldali és jobboldali sajátvektorok

```
_0.58473459759679436 _0.49123281897520849 0.64558172831562211
0.7030736810135183 _0.70387670589384521 0.10121749831985988
0.40468858328277246 _0.51307689527175093 0.75695392865014155
```

```
3346571547.2028217 0 0
0 1493422629.6901774 0
0 0 6635.7711197408571
```

```
_0.58473622922671775 _0.49122720702088041 0.6455845206571984
0.70307282476572597 _0.70387658723864721 0.10122427087026997
0.40468771331195913 _0.51308243101838935 0.7569506415048457
```

Térbeli HELMERT transzformáció

J

TH és TA programok

J

0.58473459759679436	0.49123281897520849	0.64558172831562211	3346571547.2028217	0	0	0.58473622922671775	0.49122720702088041	0.6455845206571984
0.7030736810135183	0.70387670589384521	0.10121749831985988	0	1493422629.6901774	0	0.70307282476572597	0.70387658723864721	0.10122427087026997
0.40468858328277246	0.51307689527175093	0.75695392865014155	0	0	6635.7711197408571	0.40468771331195913	0.51308243101838935	0.7569506415048457

U mátrix baloldali sajátvektorok

```
0.58473459759679436 0.49123281897520849 0.64558172831562211
0.7030736810135183 0.70387670589384521 0.10121749831985988
0.40468858328277246 0.51307689527175093 0.75695392865014155
```

the singular value decomposition (SVD)

```
3346571547.2028217 0 0
0 1493422629.6901774 0
0 0 6635.7711197408571
```

V mátrix jobboldali sajátvektorok

```
0.58473622922671775 0.49122720702088041 0.6455845206571984
0.70307282476572597 0.70387658723864721 0.10122427087026997
0.40468771331195913 0.51308243101838935 0.7569506415048457
```

Térbeli HELMERT transzformáció

J

TH és TA programok

J

R forgatási mátrix

0.99999999997902367	4.814625179247467e_6	4.3327593344799631e_6
4.814646154122082e_6	0.99999999997669264	4.8408533138699639e_6
4.3327360269018733e_6	4.8408741746969186e_6	0.99999999997889688

s méretarány

1.0000055825198517

t eltolás

641.88042527763173

68.655345453182235

416.39818478282541

Térbeli HELMERT transzformáció

J

TH és TA programok

J**Table 2** Computed transformation parameters

Parameters	Values
Translation	
t_x	641.8804 (m)
t_y	68.6554 (m)
t_z	416.3982 (m)
Rotation	
ϵ_x	-0.99849861"
ϵ_y	0.893696604"
ϵ_z	0.993088663"
Scale	
$k - 1$	5.5825 (ppm)

=====

Térbeli HELMERT transzformáció

Procrustes módszerrel

Transzformációs paraméterek

Eltolás	Elforgatás		Méretarány
641.88042527763173	0	0	0.998497670869
68.65534545318224	0	0	0.893695764645
416.39818478282541	0	0	0.993087729763

=====

Térbeli HELMERT transzformáció

J

TH és TA programok

J

Rotation matrix

0.9999999997902	0.00000481462557	-0.00000433275956
-0.00000481464655	0.9999999997669	-0.00000484085291
0.00000433273625	0.00000484087377	0.9999999997890

R forgatási mátrix

0.9999999997902367	4.814625179247467e_6	4.3327593344799631e_6
4.814646154122082e_6	0.9999999997669264	4.8408533138699639e_6
4.3327360269018733e_6	4.8408741746969186e_6	0.9999999997889688

Térbeli HELMERT transzformáció

J

TH és TA programok

JResidual matrix
E(m)

Site	X(m)	Y(m)	Z(m)
Solitude	0.0940	0.1351	0.1402
Buoch Zeil	0.0588	-0.0497	0.0137
Hohenneuffen	-0.0399	-0.0879	-0.0081
Kuelenberg	0.0202	-0.0220	-0.0874
Ex Mergelaec	-0.0919	0.0139	-0.0055
Ex Hof Asperg	-0.0118	0.0065	-0.0546
Ex Keisersbach	-0.0294	0.0041	0.0017

=====

MARADÉK ELLENTMONDÁSOK [mm]

PSZ	ex	ey	ez	e
Solitude	94	135	140	216
Bouch Zeil	59	_50	14	78
Hohenneuffen	_40	_88	_8	97
Kuehlenberg	_20	_22	_87	92
Ex Mergelaec	_92	14	_5	93
Ex Hof Asperg	_12	7	_55	56
Ex Kaisersbach	_29	4	2	30

=====
Térbeli HELMERT transzformáció

J

TH és TA programok

J

Térbeli HELMERT transzformáció

Közös pontok

PSZ Forrás rendszer [x y z] -> TRANSZFORMÁCIÓ -> Cél rendszer [X Y Z]

KOORDINÁTA JEGYZÉK

Solitude	4157222.543	664789.307	4774952.099	4157870.237	664818.678	4775416.524
Bouch Zeil	4149043.336	688836.443	4778632.188	4149691.049	688865.785	4779096.588
Hohenneuffen	4172803.511	690340.078	4758129.701	4173451.354	690369.375	4758594.075
Kuehlenberg	4177148.376	642997.635	4760764.800	4177796.064	643026.700	4761228.899
Ex Mergelaec	4137012.190	671808.029	4791128.215	4137659.549	671837.337	4791592.531
Ex Hof Asperg	4146292.729	666952.887	4783859.856	4146940.228	666982.151	4784324.099
Ex Kaisersbach	4138759.902	702670.738	4785552.196	4139407.506	702700.227	4786016.645

n = 7 közös pont

Transzformációs paraméterek

	Eltolás	Elforgatás	Méretarány
	641.88042527763173	0 0 0.998497670869	1.0000055825198517
	68.65534545318224	0 0 0.893695764645	
	416.39818478282541	0 0 0.993087729763	

MARADÉK ELLENTMONDÁSOK [mm]

PSZ	ex	ey	ez	e
Solitude	94	135	140	216
Bouch Zeil	59	50	14	78
Hohenneuffen	40	88	8	97
Kuehlenberg	20	22	87	92
Ex Mergelaec	92	14	5	93
Ex Hof Asperg	12	7	55	56
Ex Kaisersbach	29	4	2	30

Súlyegység középhibája: m0 = 0.077233660860197742

Forgatási mátrix

0.99999999997902367	4.814625179247467e_6	4.3327593344799631e_6
4.814646154122082e_6	0.99999999997669264	4.8408533138699639e_6
4.3327360269018733e_6	4.8408741746969186e_6	0.99999999997889688

Térbeli HELMERT transzformáció

J

TH és TA programok

J

Table 5 Transformed coordinates in system B from system A and residuals

Station name	Transformed coordinates in system B		
	X (m)	Y (m)	Z (m)
Solitude	4,157,870.143	664,818.543	4,775,416.384
Buoch Zeil	4,149,690.990	688,865.835	4,779,096.574
Hohenneuffen	4,173,451.394	690,369.463	4,758,594.083
Kuehlenberg	4,177,796.044	643,026.722	4,761,228.986
Ex Mergelaec	4,137,659.641	671,837.323	4,791,592.536
Ex Hof Asperg	4,146,940.240	666,982.144	4,784,324.154
Ex Kaisersbach	4,139,407.535	702,700.223	4,786,016.643

=====

PSZ Forrás rendszer [x y z] -> TRANSZFORMÁCIÓ -> Cél rendszer [X Y Z]

=====

KOORDINÁTA JEGYZÉK

Solitude	4157222.543	664789.307	4774952.099	4157870.143	664818.543	4775416.384
Bouch Zeil	4149043.336	688836.443	4778632.188	4149690.990	688865.835	4779096.574
Hohenneuffen	4172803.511	690340.078	4758129.701	4173451.394	690369.463	4758594.083
Kuehlenberg	4177148.376	642997.635	4760764.800	4177796.044	643026.722	4761228.986
Ex Mergelaec	4137012.190	671808.029	4791128.215	4137659.641	671837.323	4791592.536
Ex Hof Asperg	4146292.729	666952.887	4783859.856	4146940.240	666982.144	4784324.154
Ex Kaisersbach	4138759.902	702670.738	4785552.196	4139407.535	702700.223	4786016.643

=====

Térbeli HELMERT transzformáció

J

TH és TA programok

J

Grafarend és Avange (2003) 7 pontos példa fájlból

Coordinate pairs extracted from the local and WGS84 coordinate systems.

Site	Local coordinate system (System A)			WGS84 coordinate system (System B)		
	x	y	z	X	Y	Z
Solitude	4157222.543	664789.307	4774952.099	4157870.237	664818.678	4775416.524
Buoch Zeil	4149043.336	688836.443	4778632.188	4149691.049	688865.785	4779096.588
Hohenneuffen	4172803.511	690340.078	4758129.701	4173451.354	690369.375	4758594.075
Kuehlenberg	4177148.376	642997.635	4760764.800	4177796.064	643026.700	4761228.899
Ex Mergelaec	4137012.190	671808.029	4791128.215	4137659.549	671837.337	4791592.531
Ex Hof Asperg	4146292.729	666952.887	4783859.856	4146940.228	666982.151	4784324.099
Ex Kaisersbach	4138759.902	702670.738	4785552.196	4139407.506	702700.227	4786016.645

KOORDINÁTA JEGYZÉK

Solitude	4157222.543	664789.307	4774952.099	4157870.237	664818.678	4775416.524
Bouch Zeil	4149043.336	688836.443	4778632.188	4149691.049	688865.785	4779096.588
Hohenneuffen	4172803.511	690340.078	4758129.701	4173451.354	690369.375	4758594.075
Kuehlenberg	4177148.376	642997.635	4760764.800	4177796.064	643026.700	4761228.899
Ex Mergelaec	4137012.190	671808.029	4791128.215	4137659.549	671837.337	4791592.531
Ex Hof Asperg	4146292.729	666952.887	4783859.856	4146940.228	666982.151	4784324.099
Ex Kaisersbach	4138759.902	702670.738	4785552.196	4139407.506	702700.227	4786016.645

n = 7 közös pont

Térbeli AFFIN transzformáció

J

TH és TA programok

J

BTA mátrix

1504620685.3458474	_859446605.32305336	_1168314569.4225461
_859435278.5454756	2394155331.7202301	412846752.10195196
_1168319018.5270505	412839954.74167418	941224795.54468298

U mátrix

_0.58473622922671775	_0.49122720702088035	0.6455845206571984
_0.70307282476572608	_0.70387658723864766	0.10122427087027017
0.40468771331195896	0.51308243101838935	0.7569506415048457

V mátrix

_0.58473459759679403	_0.49123281897520849	0.64558172831562199
_0.70307368101351819	_0.70387670589384521	0.10121749831985986
0.40468858328277246	0.51307689527175071	0.75695392865014144

Térbeli AFFIN transzformáció

J

TH és TA programok

J

R forgatási mátrix

0.99999999997902345	_4.8146461540804486e_6	4.3327360269573845e_6
4.8146251797470674e_6	0.99999999997669298	4.8408741747801853e_6
_4.3327593343689408e_6	_4.8408533140503751e_6	0.99999999997889655

t eltolás

636.83089131209999
69.416383699164726
411.99061605334282

S méretarány

1.0000067980966683
1.0000044557934076
1.0000065053453875

Térbeli AFFIN transzformáció

J

TH és TA programok

J

Table 5 Transformed coordinates in system B from system A and residuals

Station name	Transformed coordinates in system B		
	X (m)	Y (m)	Z (m)
Solitude	4,157,870.143	664,818.543	4,775,416.384
Buoch Zeil	4,149,690.990	688,865.835	4,779,096.574
Hohenneuffen	4,173,451.394	690,369.463	4,758,594.083
Kuehlenberg	4,177,796.044	643,026.722	4,761,228.986
Ex Mergelaec	4,137,659.641	671,837.323	4,791,592.536
Ex Hof Asperg	4,146,940.240	666,982.144	4,784,324.154
Ex Kaisersbach	4,139,407.535	702,700.223	4,786,016.643

Térbeli HELMERT transzformáció

PSZ

Forrás rendszer [x y z] -> TRANSZFORMÁCIÓ -> Cél rendszer [X Y Z]

KOORDINÁTA JEGYZÉK

Solitude	4157222.543	664789.307	4774952.099	4157870.147	664818.555	4775416.383
Bouch Zeil	4149043.336	688836.443	4778632.188	4149690.984	688865.820	4779096.577
Hohenneuffen	4172803.511	690340.078	4758129.701	4173451.417	690369.446	4758594.066
Kuehlenberg	4177148.376	642997.635	4760764.800	4177796.072	643026.759	4761228.972
Ex Mergelaec	4137012.190	671808.029	4791128.215	4137659.620	671837.327	4791592.550
Ex Hof Asperg	4146292.729	666952.887	4783859.856	4146940.230	666982.154	4784324.161
Ex Kaisersbach	4138759.902	702670.738	4785552.196	4139407.517	702700.192	4786016.652

Térbeli AFFIN transzformáció

J

TH és TA programok

J**MARADÉK ELLENTMONDÁSOK [mm]**

PSZ	ex	ey	ez	e
Solitude	94	135	140	216
Bouch Zeil	59	_50	14	78
Hohenneuffen	_40	_88	_8	97
Kuehlenberg	_20	_22	_87	92
Ex Mergelaec	_92	14	_5	93
Ex Hof Asperg	_12	7	_55	56
Ex Kaisersbach	_29	4	2	30

Térbeli HELMERT transzformáció**Grafarend és Avange (2003) 7 pontos példa fájlból****MARADÉK ELLENTMONDÁSOK [mm]**

PSZ	ex	ey	ez	e
Solitude	90	123	141	208
Bouch Zeil	65	_35	11	74
Hohenneuffen	_63	_71	9	95
Kuehlenberg	_8	_59	_73	94
Ex Mergelaec	_71	10	_19	74
Ex Hof Asperg	_2	_3	_62	62
Ex Kaisersbach	_11	35	_7	37

Térbeli AFFIN transzformáció

J

TH és TA programok

J

Wang at al. (2014) 18 pontos példa fájlból

Point features extracted from two neighboring LIDAR point clouds.

No.	Reference station			Unregistered station			
	x	y	z	x	y	z	z
1	-91.406	53.344	8.320	-49.007	54.453	0.978	
2	-91.297	53.222	0.916	-47.365	54.435	-6.242	
3	-60.158	24.280	8.948	-36.514	13.733	3.642	
4	-60.135	24.278	1.521	-34.881	13.859	-3.608	
5	-56.298	-19.186	5.700	-53.378	-25.872	-4.187	
6	-13.269	-2.677	-1.444	-7.324	-32.695	-1.389	
7	-4.666	17.245	-1.605	9.587	-19.650	2.449	
8	-49.939	14.297	27.119	-36.532	-0.319	21.980	
9	-52.769	11.523	25.906	-39.932	-1.307	19.965	
10	-72.929	-8.630	27.146	-67.051	-8.834	15.017	
11	-46.500	-30.291	23.078	-54.124	-40.688	13.216	
12	-52.581	-22.934	5.676	-51.943	-30.962	-3.965	
13	-58.972	-17.511	18.862	-57.712	-23.376	8.397	
14	-55.429	-26.155	23.077	-59.650	-32.625	12.037	
15	-55.313	-26.131	23.039	-59.512	-32.705	12.071	
16	-63.467	27.962	26.981	-41.466	18.246	21.085	
17	-57.673	22.069	25.782	-39.133	10.234	20.247	
18	-49.687	14.083	-3.666	-29.781	-0.026	-8.062	

Térbeli HELMERT transzformáció

J

TH és TA programok

J

Térbeli HELMERT transzformáció

Közös pontok

PSZ Forrás rendszer [x y z] -> TRANSZFORMÁCIÓ -> Cél rendszer [X Y Z]

KOORDINÁTA JEGYZÉK

1	_49.007	54.453	0.978	_91.406	53.344	8.320
2	_47.365	54.435	_6.242	_91.297	53.222	0.916
3	_36.514	13.733	3.642	_60.158	24.280	8.948
4	_34.881	13.859	_3.608	_60.135	24.278	1.521
5	_53.378	_25.872	_4.187	_56.298	_19.186	5.700
6	_7.324	_32.695	_1.389	_13.269	_2.677	_1.444
7	_9.587	_19.650	2.449	_4.666	17.245	_1.605
8	_36.532	_0.319	21.980	_49.939	14.297	27.119
9	_39.932	_1.307	19.965	_52.769	11.523	25.906
10	_67.051	_8.834	15.017	_72.929	_8.630	27.146
11	_54.124	_40.688	13.216	_46.500	_30.291	23.078
12	_51.943	_30.962	_3.965	_52.581	_22.934	5.676
13	_57.712	_23.376	8.397	_58.972	_17.511	18.862
14	_59.650	_32.625	12.037	_55.429	_26.155	23.077
15	_59.512	_32.705	12.071	_55.313	_26.131	23.039
16	_41.466	_18.246	21.085	_63.467	27.962	26.981
17	_39.133	10.234	20.247	_57.673	22.069	25.782
18	_29.781	_0.026	_8.062	_49.687	14.083	_3.666

n = 18 közös pont

Térbeli HELMERT transzformáció



TH és TA programok



BTA mátrix

4925.9455966666674	_ 6763.5354396666671	_ 49.958410444444475
3018.2367476666668	12077.222406333336	_ 649.23044344444452
_ 2082.8696966666666	_ 863.6105473333356	1956.6864457777779

U mátrix

0.47386018934372309	0.82770106351854655	0.30061182678896375
_ 0.87747518697658611	0.41508082037833888	0.24030232790060696
0.074120288690320668	_ 0.37764912551773822	0.92297742160908303

V mátrix

0.47386018934372309	0.82770106351854655	0.30061182678896375
_ 0.87747518697658611	0.41508082037833888	0.24030232790060696
0.074120288690320668	_ 0.37764912551773822	0.92297742160908303

Térbeli HELMERT transzformáció



TH és TA programok



R forgatási mátrix

0.85041648237653233	_0.49450709449998786	0.1795954898974515
0.4793809209841649	0.86898119076225455	0.1227420983110061
_0.21676194107522551	_0.018287252133517624	0.9760531938940139

t eltolás

_22.965608473199129
29.396248211336889
_2.2651953650426599

s méretarány

1.0003854423961867

Térbeli HELMERT transzformáció

J

TH és TA programok

J

Rotation matrix (R)	Translation vector (T)	Scale factor (<i>s</i>)
$\begin{bmatrix} 0.850416493 & -0.494507078 & 0.179595486 \\ 0.479380907 & 0.868981201 & 0.122742085 \\ -0.216761931 & -0.018287246 & 0.976053196 \end{bmatrix}$	-22.9656, 29.3962, -2.2652	1.000385435

=====

Térbeli HELMERT transzformáció

Procrustes módszerrel

Transzformációs paraméterek

Eltolás	Elforgatás	Méretarány
_22.96560847319913	7 10 3.072626208192	1.0003854423961867
29.39624821133689	_10 _20 _46.316865945555	
_2.26519536504266	_30 _10 _38.975171224301	

=====

Térbeli HELMERT transzformáció

=====
 Transzformációs paraméterek

Eltolás		Elforgatás	Méretarány
_22.96560847319913	7 10	3.072626208192	1.0003854423961867
29.39624821133689	_10 _20	_46.316865945555	
_2.26519536504266	_30 _10	_38.975171224301	

=====

MARADÉK ELLENTMONDÁSOK [mm]

PSZ	ex	ey	ez	e
1	14	_7	_1	16
2	14	_14	_1	20
3	11	_9	_10	17
4	10	5	_1	11
5	32	21	_5	39
6	3	32	_9	33
7	_17	33	_12	39
8	_1	_1	_5	6
9	_65	_39	_6	76
10	_12	_35	47	60
11	9	_17	_42	46
12	_30	_18	_17	39
13	_19	_60	_14	64
14	_19	_62	_57	86
15	_66	_39	14	78
16	14	1	0	14
17	10	57	_21	61
18	50	_19	13	55

=====

Súlyegység középhibája: m0 = 0.03014799848709758

=====

Forgatási mátrix

0.85041648237653233	_0.49450709449998786	0.1795954898974515
0.4793809209841649	0.86898119076225455	0.1227420983110061
_0.21676194107522559	_0.018287252133517624	0.9760531938940139

=====

Térbeli HELMERT transzformáció

=====

Térbeli HELMERT transzformáció
Közös pontok

PSZ Forrás rendszer [x y z] -> TRANSZFORMÁCIÓ -> Cél rendszer [X Y Z]

=====

KOORDINÁTA JEGYZÉK

1	_49.007	54.453	0.978	_91.406	53.344	8.320
2	_47.365	54.435	_6.242	_91.297	53.222	0.916
3	_36.514	13.733	3.642	_60.158	24.280	8.948
4	_34.881	13.859	_3.608	_60.135	24.278	1.521
5	_53.378	_25.872	_4.187	_56.298	_19.186	5.700
6	_7.324	_32.695	_1.389	_13.269	_2.677	_1.444
7	9.587	_19.650	2.449	_4.666	17.245	_1.605
8	_36.532	_0.319	21.980	_49.939	14.297	27.119
9	_39.932	_1.307	19.965	_52.769	11.523	25.906
10	_67.051	_8.834	15.017	_72.929	8.630	27.146
11	_54.124	_40.688	13.216	_46.500	_30.291	23.078
12	_51.943	_30.962	_3.965	_52.581	_22.934	5.676
13	_57.712	_23.376	8.397	_58.972	_17.511	18.862
14	_59.650	_32.625	12.037	_55.429	_26.155	23.077
15	_59.512	_32.705	12.071	_55.313	_26.131	23.039
16	_41.466	18.246	21.085	_63.467	27.962	26.981
17	_39.133	10.234	20.247	_57.673	22.069	25.782
18	_29.781	_0.026	_8.062	_49.687	14.083	_3.666

n = 18 közös pont

=====

Transzformációs paraméterek

Eltolás	Elforgatás	Méretarány
_22.96560847319913	7 10 3.072626208192	1.0003854423961867
29.39624821133689	_10 _20 _46.316865945555	
_2.26519536504266	_30 _10 _38.975171224301	

=====

MARADÉK ELLENTMONDÁSOK [mm]

PSZ	ex	ey	ez	e
1	14	_7	_1	16
2	14	_14	1	20
3	11	9	_10	17
4	10	5	1	11
5	32	21	5	39
6	3	32	_9	33
7	_17	33	_12	39
8	_1	_1	_5	6
9	_65	_39	_6	76
10	_12	_35	47	60
11	9	17	_42	46
12	_30	_18	_17	39
13	19	60	_14	64
14	_19	_62	57	86
15	_66	_39	14	78
16	14	1	0	14
17	10	57	_21	61
18	50	_19	13	55

=====

=====

Súlyegység középbája: m0 = 0.03014799848709758

=====

Forgatási mátrix

0.85041648237653233	0.49450709449998786	0.1795954889974515
0.47938092098411649	0.86898119076225455	0.1227420983110061
0.21676194107522559	0.018287252133517624	0.9760531938940139

=====



TH és TA programok



PSZ

Forrás rendszer [x y z] -> TRANSZFORMÁCIÓ -> Cél rendszer [X Y Z]

=====

KOORDINÁTA JEGYZÉK

1	_49.007	54.453	0.978	_91.420	53.351	8.321
2	_47.365	54.435	_6.242	_91.311	53.236	0.915
3	_36.514	13.733	_3.642	_60.169	24.271	8.958
4	_34.881	13.859	_3.608	_60.145	24.273	1.522
5	_53.378	_25.872	_4.187	_56.330	_19.207	5.695
6	_7.324	_32.695	_1.389	_13.272	_2.709	_1.435
7	9.587	_19.650	2.449	_4.649	17.212	_1.593
8	_36.532	_0.319	21.980	_49.938	14.298	27.124
9	_39.932	_1.307	19.965	_52.704	11.562	25.912
10	_67.051	_8.834	15.017	_72.941	_8.595	27.099
11	_54.124	_40.688	13.216	_46.509	_30.308	23.120
12	_51.943	_30.962	_3.965	_52.551	_22.916	5.693
13	_57.712	_23.376	8.397	_58.991	_17.571	18.876
14	_59.650	_32.625	12.037	_55.410	_26.093	23.020
15	_59.512	_32.705	12.071	_55.247	_26.092	23.025
16	_41.466	18.246	21.085	_63.481	27.961	26.981
17	_39.133	10.234	20.247	_57.683	22.012	25.803
18	_29.781	_0.026	_8.062	_49.737	14.102	_3.679

=====

Térbeli HELMERT transzformáció

J

TH és TA programok

J

Wang at al. (2014) 18 pontos példa fájlból

Point features extracted from two neighboring LIDAR point clouds.

No.	Reference station			Unregistered station			
	x	y	z	x	y	z	z
1	-91.406	53.344	8.320	-49.007	54.453	0.978	
2	-91.297	53.222	0.916	-47.365	54.435	-6.242	
3	-60.158	24.280	8.948	-36.514	13.733	3.642	
4	-60.135	24.278	1.521	-34.881	13.859	-3.608	
5	-56.298	-19.186	5.700	-53.378	-25.872	-4.187	
6	-13.269	-2.677	-1.444	-7.324	-32.695	-1.389	
7	-4.666	17.245	-1.605	9.587	-19.650	2.449	
8	-49.939	14.297	27.119	-36.532	-0.319	21.980	
9	-52.769	11.523	25.906	-39.932	-1.307	19.965	
10	-72.929	-8.630	27.146	-67.051	-8.834	15.017	
11	-46.500	-30.291	23.078	-54.124	-40.688	13.216	
12	-52.581	-22.934	5.676	-51.943	-30.962	-3.965	
13	-58.972	-17.511	18.862	-57.712	-23.376	8.397	
14	-55.429	-26.155	23.077	-59.650	-32.625	12.037	
15	-55.313	-26.131	23.039	-59.512	-32.705	12.071	
16	-63.467	27.962	26.981	-41.466	18.246	21.085	
17	-57.673	22.069	25.782	-39.133	10.234	20.247	
18	-49.687	14.083	-3.666	-29.781	-0.026	-8.062	

Térbeli AFFIN transzformáció

J

TH és TA programok

J

Térbeli AFFIN transzformáció

Közös pontok

PSZ Forrás rendszer [x y z] -> TRANSZFORMÁCIÓ -> Cél rendszer [X Y Z]

KOORDINÁTA JEGYZÉK

1	_49.007	54.453	0.978	_91.406	53.344	8.320
2	_47.365	54.435	_6.242	_91.297	53.222	0.916
3	_36.514	13.733	_3.642	_60.158	24.280	8.948
4	_34.881	13.859	_3.608	_60.135	24.278	1.521
5	_53.378	_25.872	_4.187	_56.298	_19.186	5.700
6	_7.324	_32.695	_1.389	_13.269	_2.677	_1.444
7	9.587	_19.650	2.449	_4.666	17.245	_1.605
8	_36.532	_0.319	21.980	_49.939	14.297	27.119
9	_39.932	_1.307	19.965	_52.769	11.523	25.906
10	_67.051	_8.834	15.017	_72.929	_8.630	27.146
11	_54.124	_40.688	13.216	_46.500	_30.291	23.078
12	_51.943	_30.962	_3.965	_52.581	_22.934	5.676
13	_57.712	_23.376	8.397	_58.972	_17.511	18.862
14	_59.650	_32.625	12.037	_55.429	_26.155	23.077
15	_59.512	_32.705	12.071	_55.313	_26.131	23.039
16	_41.466	18.246	21.085	_63.467	27.962	26.981
17	_39.133	10.234	20.247	_57.673	22.069	25.782
18	_29.781	_0.026	_8.062	_49.687	14.083	_3.666

n = 18 közös pont

Térbeli AFFIN transzformáció

J

TH és TA programok

J

BTA mátrix

4925.9455966666674	3018.2367476666668	_2082.8696966666666
_6763.5354396666671	12077.222406333336	_863.61054733333356
_49.958410444444475	_649.23044344444452	1956.6864457777779

U mátrix

0.033732805563191727	_0.98473241034517345	0.17077522608569404
0.99819211468231273	0.04170045770381902	0.04328480118175751
_0.049745351691270305	0.1690063662797234	0.98435880051027913

V mátrix

0.033732805563191727	_0.98473241034517345	0.17077522608569404
0.99819211468231273	0.04170045770381902	0.04328480118175751
_0.049745351691270305	0.1690063662797234	0.98435880051027913

Térbeli AFFIN transzformáció



TH és TA programok



R forgatási mátrix

0.85041648237653145	0.47938092098416479	_0.21676194107522512
_0.49450709449998775	0.868981190762254	_0.018287252133517756
0.17959548989745139	0.12274209831100619	0.9760531938940139

S méretarány

1.0000891446759685
1.0005179614799915
1.0006625291619156

t eltolás

_22.975137472426159
29.399341666974369
_2.2695982625529498

Térbeli AFFIN transzformáció

J

TH és TA programok

J

Rotation matrix (R)

$$\begin{bmatrix} 0.850416493 & -0.494507078 & 0.179595486 \\ 0.479380907 & 0.868981201 & 0.122742085 \\ -0.216761931 & -0.018287246 & 0.976053196 \end{bmatrix}$$

Translation vector (T)

-22.9656, 29.3962, -2.2652

Scale factor (s)

1.000385435

Térbeli HELMERT transzformáció

=====

Térbeli AFFINT transzformáció

Procrustes módszerrel

Transzformációs paraméterek

	Eltolás		Elforgatás		Méretarány
	22.97513747242616	1	4	24.108293688486	1.00008914467597
	29.39934166697437	12	31	8.101455401600	1.00051796147999
	2.26959826255295	29	24	36.053349984591	1.00066252916192

=====

Forgatási mátrix

0.85041648237653145	0.47938092098416479	0.21676194107522512
0.49450709449998775	0.868981190762254	0.018287252133517756
0.17959548989745139	0.12274209831100619	0.9760531938940139

Térbeli AFFIN transzformáció

Transzformációs paraméterek

Eltolás		Elforgatás		Méretarány
_22.97513747242616	_1_4	_24.108293688486		1.00008914467597
_29.39934166697437	12_31	8.101455401600		1.00051796147999
_2.26959826255295	29_24	36.053349984591		1.00066252916192

MARADÉK ELLENTMONDÁSOK [mm]

PSZ	ex	ey	ez	e
1	3	_13	1	14
2	4	_21	5	21
3	10	_7	_8	14
4	8	2	_2	9
5	32	24	8	41
6	15	33	_5	37
7	_2	31	_7	32
8	1	_2	_9	9
9	_64	_39	_10	76
10	6	_33	43	55
11	11	_22	_45	51
12	_29	_14	_15	35
13	18	63	_16	67
14	_19	57	55	81
15	_66	_34	12	75
16	11	_2	_3	12
17	9	55	_25	61
18	52	_20	18	58

Súlyegység középhibája: m0 = 0.029774770235139549

Forgatási mátrix

0.85041648237653145	0.47938092098416479	_0.21676194107522512
_0.49450709449998775	0.868981190762254	_0.018287252133517756
0.17959548989745139	0.12274209831100619	0.9760531938940139

Térbeli AFFIN transzformáció

TH és TA programok

TH és TA programok

Térbeli AFFIN transzformáció

```

=====
Térbeli AFFIN transzformáció
Közös pontok
PSZ      Forrás rendszer [x y z] -> TRANSZFORMÁCIÓ -> Cél rendszer [X Y Z]
=====
                                KOORDINÁTA JEGYZÉK
1      _49.007      54.453      0.978      _91.406      53.344      8.320
2      _47.365      54.435      _6.242      _91.297      53.222      0.916
3      _36.514      13.733      3.642      _60.158      24.280      8.948
4      _34.881      13.859      _3.608      _60.135      24.278      1.521
5      _53.378      _25.872      _4.187      _56.298      _19.186      5.700
6      _7.324      _32.695      _1.389      _13.269      _2.677      _1.444
7      9.587      _19.650      2.449      _4.666      17.245      _1.605
8      _36.532      _0.319      21.980      _49.939      14.297      27.119
9      _39.932      _1.307      19.965      _52.769      11.523      25.906
10     _67.051      _8.834      15.017      _72.929      _8.630      27.146
11     _54.124      _40.688      13.216      _46.500      _30.291      23.078
12     _51.943      _30.962      _3.965      _52.581      _22.934      5.676
13     _57.712      _23.376      8.397      _58.972      _17.511      18.862
14     _59.650      _32.625      12.037      _55.429      _26.155      23.077
15     _59.512      _32.705      12.071      _55.313      _26.131      23.039
16     _41.466      18.246      21.085      _63.467      27.962      26.981
17     _39.133      10.234      20.247      _57.673      22.069      25.782
18     _29.781      _0.026      _8.062      _49.687      14.083      _3.666

                                n = 18 közös pont
=====
                                Transzformációs paraméterek
                                Eltolás      Elforgatás      Méretarány
                                _22.97513747242616      1 4 _24.108293688486      1.000089144647597
                                29.39934166697437      12 31 8.101455401600      1.00051796147999
                                _2.26959826255295      29 24 36.053349984591      1.00066252916192
=====
                                MARADÉK ELLENTMONDÁSOK [mm]
PSZ      ex      ey      ez      e
1      3      _13      1      14
2      4      _21      5      21
3      10      7      _8      14
4      8      2      2      9
5      32      24      8      41
6      15      33      _5      37
7      _2      31      _7      32
8      1      2      _9      9
9      _64      _39      _10      76
10     6      _33      43      55
11     11      22      _45      51
12     _29      _14      _15      35
13     18      63      _16      67
14     _19      _57      55      81
15     _66      _34      12      75
16     11      2      _3      12
17     9      55      _25      61
18     52      _20      18      58

=====
Súlyegység középhibája: m0 = 0.029774770235139549
=====

```

```

=====
Forgatási mátrix
0.85041648237653145 0.47938092098416479 0.216761941075222512
_0.49450709449998775 0.868981190762254 _0.018287252133517756
0.17959548989745139 0.12274209831100619 0.9760531938940139
=====

```

J

TH és TA programok

J

=====

PSZ Forrás rendszer [x y z] -> TRANSZFORMÁCIÓ -> Cél rendszer [X Y Z]

=====

KOORDINÁTA JEGYZÉK

1	_49.007	54.453	0.978	_91.409	53.357	8.319
2	_47.365	54.435	_6.242	_91.301	53.243	0.911
3	_36.514	13.733	_3.642	_60.168	24.273	8.956
4	_34.881	13.859	_3.608	_60.143	24.276	1.519
5	_53.378	_25.872	_4.187	_56.330	_19.210	5.692
6	_7.324	_32.695	_1.389	_13.284	_2.710	_1.439
7	9.587	_19.650	2.449	_4.664	17.214	_1.598
8	_36.532	_0.319	21.980	_49.940	14.299	27.128
9	_39.932	_1.307	19.965	_52.705	11.562	25.916
10	_67.051	_8.834	15.017	_72.935	_8.597	27.103
11	_54.124	_40.688	13.216	_46.511	_30.313	23.123
12	_51.943	_30.962	_3.965	_52.552	_22.920	5.691
13	_57.712	_23.376	8.397	_58.990	_17.574	18.878
14	_59.650	_32.625	12.037	_55.410	_26.098	23.022
15	_59.512	_32.705	12.071	_55.247	_26.097	23.027
16	_41.466	18.246	21.085	_63.478	27.964	26.984
17	_39.133	10.234	20.247	_57.682	22.014	25.807
18	_29.781	_0.026	_8.062	_49.739	14.103	_3.684

=====

Térbeli AFFIN transzformáció

J

TH és TA programok

J**MARADÉK ELLENTMONDÁSOK [mm]**

PSZ	ex	ey	ez	e
1	14	7	1	16
2	14	14	1	20
3	11	9	10	17
4	10	5	1	11
5	32	21	5	39
6	3	32	9	33
7	17	33	12	39
8	1	1	5	6
9	65	39	6	76
10	12	35	47	60
11	9	17	42	46
12	30	18	17	39
13	19	60	14	64
14	19	62	57	86
15	66	39	14	78
16	14	1	0	14
17	10	57	21	61
18	50	19	13	55

Térbeli HELMERT transzformáció**Wang at al. (2014) 18 pontos példa fájlból****MARADÉK ELLENTMONDÁSOK [mm]**

PSZ	ex	ey	ez	e
1	3	13	1	14
2	4	21	5	21
3	10	7	8	14
4	8	2	2	9
5	32	24	8	41
6	15	33	5	37
7	2	31	7	32
8	1	2	9	9
9	64	39	10	76
10	6	33	43	55
11	11	22	45	51
12	29	14	15	35
13	18	63	16	67
14	19	57	55	81
15	66	34	12	75
16	11	2	3	12
17	9	55	25	61
18	52	20	18	58

Térbeli AFFIN transzformáció

Összefoglalás

- ***A Prokrusztész transzformációs módszerrel végzett 7 illetve 9 paraméteres transzformációk eredményei igazolják az algoritmus hatékonyságát.***
- ***Különösen vonzó tulajdonsága az eljárásnak, összehasonlítva a hagyományos legkisebb négyzetek módszerével, hogy **sem a kezdeti értékek ismeretére, sem iterációra nincs szükség.*****
- ***A felhasználónak csupán egyetlen feltételt kell biztosítania, mégpedig **mindkét alakzatban adott koordinátákat mátrixformába kell alakítania.*****

Összefoglalás

- **A előadásban bemutatott módszer Prokrusztész transzformációt alkalmaz a *térbeli forgatási mátrix* a *méretarány paraméterek* és az *eltolások vektorának meghatározásához*.**
- **Ismerteti a *Prokrusztész transzformáció* megoldását a *7 és 9 paraméteres geodéziai dátumtranszformáció* esetében.**

Összefoglalás

A 9 paraméteres Prokrusztész transzformáció felhasználható:

- **a 9 paraméteres transzformációs paraméterek gyorsabb és hatékonyabb meghatározásához, a két alakzatban, mátrix formában adott koordináták felhasználásával,**
- **más transzformációs módszerrel meghatározott transzformációs paraméterek gyors ellenőrzésére,**
- **méretarány paraméterek meghatározásához, amelyek hasznosak lehetnek a torzulások javítására olyan módszerek esetén, ahol először a forgatások és eltolások kerülnek meghatározásra a méretaránytól függetlenül.**

Összefoglalás

- **Zárt képlet felhasználásával számítottuk az elforgatást, az eltolást és a méretarányt, azaz 7 illetve 9 ismeretlen transzformációs paraméter értékét határoztuk meg.**
- **Bemutattuk a feladat megoldásához felhasznált módszert, és egyenleteket.**
- **Az eljárás hatékonyságát és alkalmazhatóságát 7 közös pont esetében helyi és WGS84 koordináta rendszerek közötti, továbbá 18 közös pont esetén szomszédos LiDAR álláspontok közötti transzformáción teszteltük.**

Összefoglalás

- **A számítások azt mutatják, hogy a Prokrusztész transzformációs módszer *gyors és megbízható eredményt ad.***
- **Ennek az algoritmusnak a legnagyobb előnye, hogy *tetszőleges nagyságú szögelfordulások esetében is alkalmazható a transzformációs paraméterek számításához.***
- **A bemutatott megoldás eredményeként *SVD eljárással számítjuk az R forgatási mátrixot.***

Összefoglalás

- **Befejezésként megállapíthatjuk, hogy a Prokrusztész transzformációs módszer felhasználásán alapuló algoritmus alkalmas a térbeli transzformáció paramétereinek számításához.**
- **A bemutatott megoldás egy új választható módszer a térbeli Helmert és a térbeli affin transzformáció rövid leírására.**

Hivatkozások

- Awange JL, Grafarend EW** (2005): *Solving Algebraic Computational Problems in Geodesy and Geoinformatics, The answer to modern Challenges*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York.
- Awange JL, K.-H. Base, Claessens SJ** (2008): Procrustean solution of 9-parameter transformation problem. *Earth Planets Space*, **60**, 529-537.
- Awange JL, Grafarend EW, Paláncz B, Zaletnyik P** (2010): *Algebraic Geodesy and Geoinformatics*. Springer. Heidelberg, Dordrecht, London., Second Edition.
- Awange JL, Grafarend EW** (2012): *Application of Linear and Nonlinear Models Fixed Effects, Random Effects, and Total Least Squares*. Springer. Heidelberg, New York, Dordrecht, London.
- Grafarend EW, Awange LJ** (2000): Determination of the vertical deflection by GPS/LPS measurements. *Zeitschrift für Vermessungswesen*, **125**, 279-288.
- Grafarend EW, Awange LJ** (2003): Nonlinear analysis of the three-dimensional datum transformation [conformal group C7(3)]. *J. Geod.* **77**, 66-76.
- Hamilton WR** (1844): On quaternions, or on a new system of imaginaries algebra. *Phil. Mag.* **25**(3), 489-495.
- Hamilton WR** (1853): *Lectures on quaternions: containing a systematic statement of a New mathematical method*. Hodges and Smith, Dublin.
- Horn BKP** (1987): Closed-form solution of absolute orientation using unit quaternions. *J. Opt. Soc. Am. A*, **4**(4), 629-642.
- Joseph J, Javiola J** (2003): A comparison of unscented and extended Kalman filtering for estimating quaternions motion. *IEEE Press*, **3**, 2435-2440.
- Murray R. M, S. S. Sastry, L. Zexiang** (1994): *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*. CRC Press, USA, ISBN 0-849-37981-4.
- Papp E, Szűcs L** (2005): Földi és műholdas hálózatok transzformációja. *Geomatikai Közlemények VIII*, 85-92.
- Papp E** (2013): Geodéziai dátumtranszformáció kvaternióval. *Geomatikai Közlemények XVI*, 17-28.
- Papp E** (2015): Kvaternió alapú geodéziai dátumtranszformáció iterációval. *Geomatikai Közlemények XVIII/2*, 23-33.
- Papp E** (2017): Geodéziai dátumtranszformáció kettős kvaternióval. *Geomatikai Közlemények XX*, 99-109.
- Prosková J**, (2011): Application of dual quaternions algorithms for geodetic datum transformation. *J. Appl. Math.* **4**(2), 225-236.
- Prosková J**, (2012): Discovery of dual quaternions for geodesy. *J. Geometry Graphics* **16**(2), 195-209
- Shen YZ, Chen Y, Zheng DH** (2006): A quaternion-based geodetic datum transformation algorithm. *J. Geod.* **80**, 233-239.
- Vaníček P, Steeves RR** (1996): Transformation of coordinates between two horizontal geodetic datums. *J. Geod.*, **70**, 740-745.
- Vaníček P, Novák P, Craymer MR, Pagiatakis S** (2002): On the correct determination of transformation parameters of a horizontal geodetic datum. *Geomatica*, **56**(4), 329-340.
- Yang Y** (1999): Robust estimation of geodetic datum transformation. *J. Geod.*, **73**, 268-274.
- Wang YB, Wang YJ, Wu K, Yang HC, Zhang H** (2014): A dual quaternion-based, closed-form pairwise registration algorithm for point clouds. *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing* **94**, 63-69.
- Zeng H, Yi Q** (2011): Quaternion-Based Iterative Solution of Three-Dimensional Coordinate Transformation Problem. *J. of Computers*, **6**(7), 1361-1368.
- Walker M.V., Shao L., Volz R.A.**, (1991): Estimating 3-D location parameters using dual number quaternions. *CVGIP: Image Understanding* **54** (3), 358-367.

VÉGE