



GISOPEN 2017

2017. április 11-13.

Felmérési technológiák a 21.században



KETTŐS KVATERNIÓ GEODÉZIAI ALKALMAZÁSA

PAPP ERIK

SZENT ISTVÁN EGYETEM
YBL MIKLÓS ÉPÍTÉSTUDOMÁNYI KAR
BUDAPEST

TÉMAKÖRÖK

1. Bevezetés
2. Dátumtranszformáció kvaternióval
3. Kettős kvaternió
4. Dátumtranszformáció kettős kvaternióval
5. TH2 program
6. Összefoglalás

Bevezetés

- **A térbeli hasonlósági transzformáció, különösen a térbeli tájékozás az egyik legfontosabb és legkritikusabb feladat a geodéziában, fotogrammetriában, navigációban, lézershakkenner és LiDAR mérések feldolgozásában, robotkar manipulálásában, animációban és számos más területen.**
- **A térbeli adatokhoz helymeghatározó adatok kapcsolódnak, amelyeket koordinátákkal adunk meg.**
- **A koordináta rendszer alapja egy geodéziai dátum, amely meghatározza a Föld méretét és alakját, a koordináta rendszer kezdőpontját és tájékozását. A Föld térképezéséhez használjuk az előzőekben definiált koordináta rendszert.**
- **A geodéziai dátumok sokasága létezik, hiszen minden ország különböző, saját dátumot alkalmaz. Példaként említhetjük Magyarországot, ahol geodéziai dátumtranszformációt használunk az EOY és GK rendszerben adott alaphálózati pontok koordinátáinak WGS84 rendszerbe történő transzformálásához.**

Bevezetés

- ***A hasonlósági transzformáció esetén a méretarány minden irányban azonos értékű.***
- ***A hétparaméteres hasonlósági transzformációt elterjedten alkalmazzák dátumtranszformációhoz, egyszerűsége, hatékonysága, egyedisége és szabatosága miatt.***
- ***A transzformáció **három eltolás, egy méretarány** és **három forgatási paraméter** meghatározásából áll.***
- ***Következésképpen a koordináták az egyik koordináta rendszerből egy másik koordináta rendszerbe transzformálhatók***
 - ***a koordinátarendszer kezdőpontjának **eltolásával,*****
 - ***elforgatások alkalmazásával és***
 - ***a méretarány megváltoztatásával.***

Bevezetés

- A gyakorlatban a hét transzformációs paraméter nem minden esetben ismert. Azonban, ha a közös pontok koordinátái mindkét koordináta rendszerben adottak, a transzformációs paraméterek az előbbieik szerint meghatározhatók.
- **Három közös pont** elegendő a transzformációs paraméterek meghatározásához.
- Néhány népszerű hétparaméteres hasonlósági transzformációs modell használatos a gyakorlatban, mint a **Bursa-Wolf**, vagy ismertebb nevén a **Helmert-féle transzformáció**, amellyel jelen előadás tárgya, vagy a **Molodensky-Badekas**.
- A hasonlósági transzformációs modellt gyakran egyszerűsítik, linearizálják a paraméterek könnyebb kiszámítása céljából. A létező hétparaméteres modellek megoldása **a hagyományos algoritmusok** felhasználásával **a forgásszögek meghatározásán alapul. Újabban a forgásszögeket kvaterniókkal helyettesítik, az új modell kettős kvaternión alapul.**

Bevezetés

- Az előadásban ismertejük **a kettős kvaternió alkalmazását a geodéziai dátumtranszformációhoz, a Bursa-Wolf hétparaméteres hasonlósági transzformációs modellben.**

Dátumtranszformáció kvaternióval



- **Sir William Rowan Hamilton** (1805-1865) 1843-ban fedezte fel a kvaterniókat egy 3D vektor ábrázolására. A kvaternió nagyon alkalmas a forgatás egységsugarú gömbön történő leírására.

Dátumtranszformáció kvaternióval

A Q kvaternió komplex számként a következőképpen definiálható

$$Q = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k} = q_0 + \mathbf{q}$$

ahol

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1, \mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}, \mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i}, \mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j}$$

és a képzetes rész $\mathbf{q} = q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}$

egy 3D vektort jelöl.

Dátumtranszformáció kvaternióval

A Q kvaternió **oszlopvektor formában** is kifejezhető az $(1 \ i \ j \ k)$
egységvektorok felhasználásával

$$\mathbf{Q} = (q_0 \ q_1 \ q_2 \ q_3)^T = (q_0 \ \mathbf{q}^T)^T$$

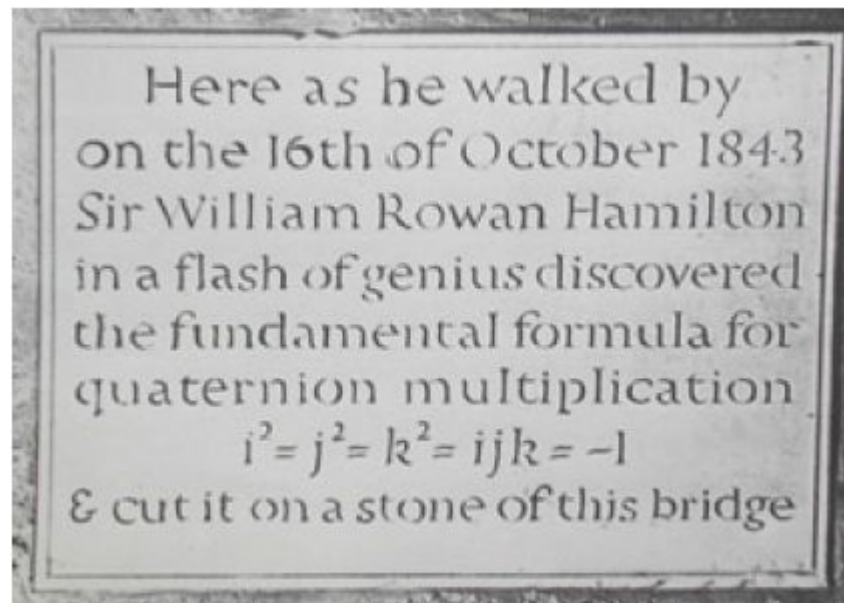
ahol

$$\mathbf{q} = (q_1 \ q_2 \ q_3)^T$$

egy 3D vektort és T a transzponálást jelöli.



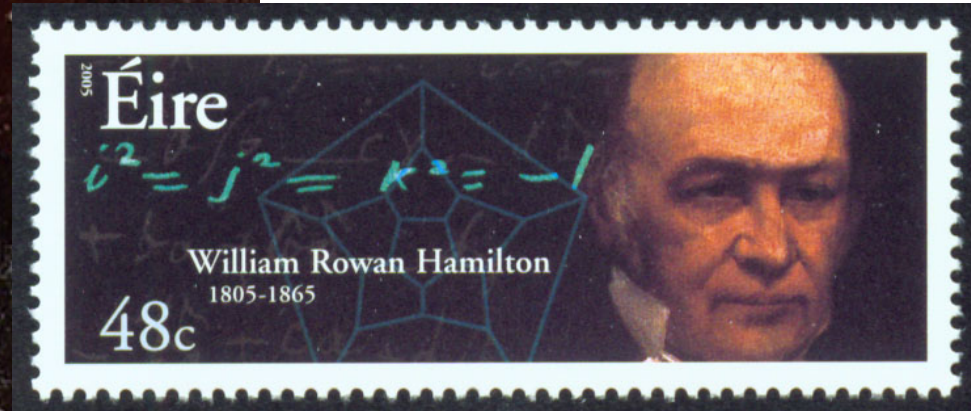
Sir William Rowan Hamilton



Broome híd Dublin Írország



Sir William Rowan Hamilton



Dátumtranszformáció kvaternióval

- Miután Horn sikeresen alkalmazta a kvaterniót - 144 évvel annak felfedezése után - a **térbeli tájékozáshoz** Horn (1987), a forgatási mátrix tömör leírása továbbá az eljárás hatékonysága a módszert a figyelem középpontjába állította.
- Jelenleg a kvaterniókat sikeresen alkalmazzák a **szilárd test mozgásának elemzéséhez** Josepf at al (2003), Kim at al. (2004) és **geodéziai dátumtransz-formációhoz** Yang (1999), Shen at al. (2006), Zeng at al (2012).
- Ám, ha a térben **egységkvaterniót használunk a forgatás leírásához**, hét transzformációs paramétert kell kiszámítanunk, **először a forgatásokat majd a méretarányt és végül az eltolásokat.**

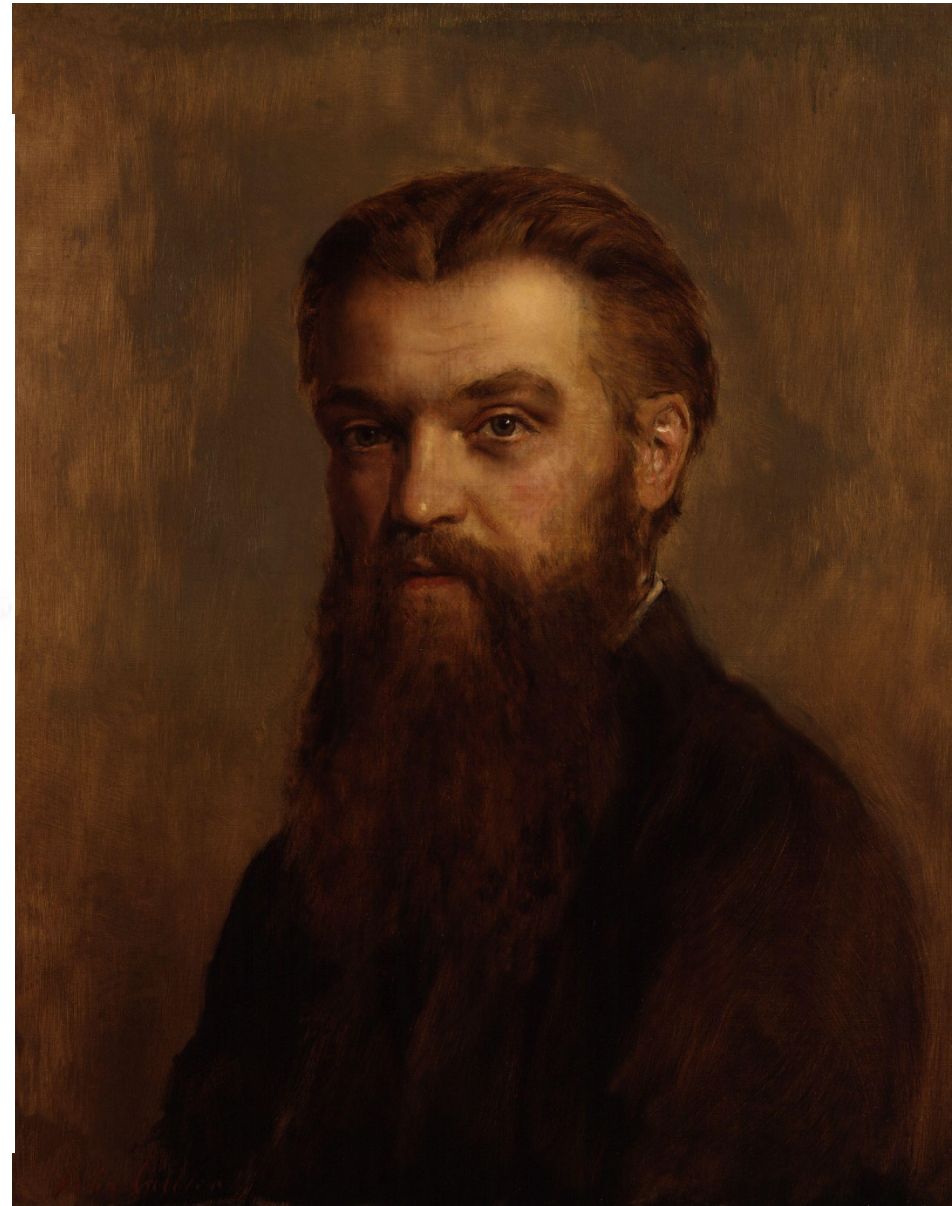
Dátumtranszformáció kvaternióval

- Walker bevezette a **kettős kvaterniókat** a hasonlósági transzformáció megoldásához.
- **Egyetlen képlet alkalmazásával** a kettős kvaternió valós és kettős részének felhasználásával **kifejezhető a forgatás és az eltolás**, lehetővé téve a hat paraméter egyidejű számítását, azaz **a három forgás szögét** és **a három eltolási paramétert** Walker *et al* (1991).
- Hasonló megoldást mutatott be Daniilidis (1999). Azonban sem Walker *et al.* (1991) sem Daniilidis (1999) sem Vanicek *et al.* (2002) nem vette figyelembe a méretarányt a transzformáció során.

Kettős kvaternió



- **Willian Kingdom Clifford** (1845-1879) tovább fejlesztette a kvaterniót, a tizenkilencedik században felfedezte a **kettős kvaterniót** és **alkalmazta merev test transzformációjához** Clifford (1873, 1882).
- **Nagyon közeli kapcsolat van a kettős kvaternió** és a klasszikus térbeli kinematikában használatos ún. **Chasles elmélet** között Chasles (1830), Murray at al (1994).



Willian Kingdom Clifford

Kettős kvaternió

- A **Chasles elmélet** szerint bármely merev test transzformációja leírható csavarmozgásként, azaz **egy tengely körüli forgatással** és **a tengely irányú eltolással**.
- Tehát a **kettős kvaternió** megfelelő az **elforgatás** és az **eltolás** leírására.
- Következésképpen a létező megoldások két csoportba sorolhatók, nevezetesen **iterációs módszerek** és **zárt képletek alkalmazása**.
- **Iterációs módszer** általában forgatási mátrixot használ merev test transzformációjához, a kezdő értékek közelítő ismerete szükséges a linearizáláshoz, amely gyakran hibát eredményez a számítások során.
- Ezzel szemben a **zárt képletek alkalmazása** esetén szükségtelen a kezdeti értékek közelítő ismerete, ezért ez a módszer napjainkban az érdeklődés középpontjába került. Legfontosabb előnye a zárt képletek alkalmazásán alapuló módszernek, hogy a lehető legjobb transzformációt biztosítja egy lépésben.

Kettős kvaternió

- A **kettős kvaternió** tulajdonképpen a kvaternió matematika és a kettős számelmélet összeláncolása (concatenation).
- Amíg **egy kvaternió négy skalár értékből áll, egy kettős kvaternió nyolc skalár értékből áll.**
- **Kettős kvaternió** nyolc valós számból álló összetett adatszerkezetként vagy két közönséges kvaternió szorzataként értelmezhető. Kettős kvaterniók, kvaterniókból és kettős számokból állnak az alábbiak szerint

$$\widehat{q} = r + \varepsilon s \quad (1)$$

az r és s mindkettő valódi kvaternió, ezeket **valós** és **kettős résznek** nevezzük, ε a kettős művelet jele (dual operator)

Kettős kvaternió

A kettős kvaternió a valódi kvaterniókhoz hasonlóan értelmezhető

$$\hat{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \hat{\mathbf{n}} \end{bmatrix} \quad (2)$$

ahol az $\hat{\mathbf{n}}$ kettős vektor egy térbeli 3D egyenest jelöl amely körül a koordináta rendszer elforgatásra, illetve amely irányába eltolásra kerül, a $\hat{\theta}$ az elforgatás és eltolás kettős szögét jelöli. Az $\hat{\mathbf{n}}$ kettős vektor az elforgatás és eltolás $\hat{\theta}$ kettős szöge az alábbiak szerint adható meg:

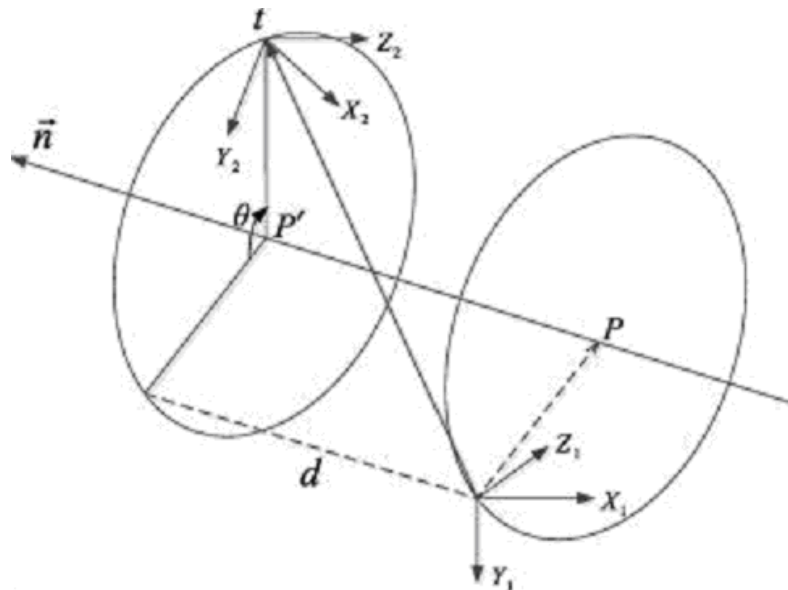
$$\hat{\mathbf{n}} = \vec{\mathbf{n}} + \varepsilon \vec{\mathbf{p}} \times \vec{\mathbf{n}} \quad (3)$$

$$\hat{\theta} = \theta + \varepsilon d \quad (4)$$

ahol $\vec{\mathbf{n}}$ egy olyan egységvektor, amely meghatározza a forgatás tengelyét és az eltolás irányát

Kettős kvaternió

- Az egyenes θ szöggel kerül elforgatásra a P ponton átmenő vektor irányában és d távolságra kerül eltolásra az vektor által meghatározott irányban.
- Összehasonlítva az egység kvaterniót a kettős kvaternióval, ugyanaz a transzformáció hajtható végre, **először eltolva** az eredeti koordináta rendszert d távolságra az \vec{n} vektor irányában **majd elforgatva** azt θ szöggel.



Elforgatás és eltolás kettős kvaternióval [Wang et al. ,2014, Fig. 1.]

Kettős kvaternió

- A (3) és (4) egyenletet behelyettesítve a (2) egyenletbe az alábbi egyenleteket kapjuk

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \vec{\mathbf{n}} \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} -\frac{d}{2} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \frac{d}{2} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \vec{\mathbf{n}} + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) (\vec{\mathbf{p}} \times \vec{\mathbf{n}}) \end{bmatrix} \quad (6)$$

Kettős kvaternió

- Az **egység kvaternióhoz** hasonlóan definiálható az **egység kettős kvaternió**. Következésképpen bármely kettős kvaternió megszorozva egység kettős kvaternióval, annak értéke változatlan marad. **Egység kettős kvaternió** meghatározásakor az első skalár értéke 1 a többi hét skalár értéke 0.

$$\hat{q} = [1 \ 0 \ 0 \ 0][0 \ 0 \ 0 \ 0] \quad (7)$$

- **Forgatás** és **eltolás** értékekből **egység kettős kvaternió** az (1) egyenlet alapján a következők szerint definiálható:

$$\hat{q} = r + \varepsilon s \quad (8)$$
$$s = \frac{1}{2}tr$$

Kettős kvaternió

- Az r a **forgatást leíró** egység kvaternió és t az **eltolást leíró** kvaternió, melynek elemei

$$r = \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad n_x \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad n_y \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad n_z \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]$$

(9)

$$s = \left[0 \quad t_x \quad t_y \quad t_z \right]$$

ahol n a forgatás tengelye, θ a forgatás szöge és t_x, t_y, t_z jelöli az eltolás koordinátatengely irányú értékeit. A **forgatás és eltolás kettős kvaternióval** a (7), (8) és (9) egyenletek alapján:

$$\hat{q} = \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad n_x \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad n_y \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad n_z \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \left[0 \quad \frac{t_x}{2} \quad \frac{t_y}{2} \quad \frac{t_z}{2} \right]$$

(10)

Kettős kvaternió

- A **kettős kvaternió** az eddig elmondottak alapján **nyolc elemből áll**, azonban egy 3D objektum transzformálásához **hat független változó** szükséges, következésképpen a kettős kvaternió nyolc eleméből **kettő nem független**.
- Amint az a (11) és (12) egyenletekből látható, a kettős kvaternió elemeinek az alábbi két kényszert kell kielégíteniük:

$$\mathbf{r}^T \mathbf{r} = 1 \quad (11)$$

$$\mathbf{r}^T \mathbf{s} = 0 \quad (12)$$

Megjegyezzük, hogy **a kettős kvaterniók az eltolásvektor felével „dolgoznak”, hasonlóan a klasszikus kvaterniókhoz, amelyek a forgásszög felével „dolgoznak”.**

Dátumtranszformáció kettős kvaternióval

Kettős kvaternió alkalmazásával a Bursa-Wolf hasonlósági transzformációs modell a következők szerint írható fel

$$F(\mu, \mathbf{R}, \vec{t}) = \sum_{i=1}^N \left\| \mu \mathbf{R} \vec{b}_i + \vec{t} - \vec{a}_i \right\| \quad (13)$$

ahol a közös pontokat leíró helymeghatározó kvaterniók

$$\mathbf{a}_i = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{a}_i \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_i = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{b}_i \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} \quad (14)$$

a két különböző rendszerben adott közös pontok 3D koordinátáit tartalmazzák, az $N(N \geq 3)$ egész szám a közös pontok száma, $\vec{t} = (t_x t_y t_z)$ jelöli a három eltolás paramétert, μ a méretarány tényező és az \mathbf{R} a forgatási mátrix.

Dátumtranszformáció kettős kvaternióval

- Az (5) és (9) egyenlet alapján a kettős kvaternió valós része a teljes forgatás eljárását megadja, amelyhez tartozó **forgatási mátrix** az alábbiak szerint írható fel

$$\mathbf{R} = \left(r_0^2 - \vec{\mathbf{r}}^T \vec{\mathbf{r}} \right) \mathbf{I} + 2 \left(\vec{\mathbf{r}} \vec{\mathbf{r}}^T + r_0 \mathbf{K}(\vec{\mathbf{r}}) \right) \quad (15)$$

ahol az $\mathbf{r}^T = [r_0, \vec{\mathbf{r}}] = [r_0, r_1, r_2, r_3]$ a forgatást leíró kvaternió, \mathbf{I} egy 3x3 egységmátrix és a $\mathbf{K}(\vec{\mathbf{r}})$ 3x3 ferdén szimmetrikus mátrix a következő alakú

$$\mathbf{K}(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} 0 & -r_3 & r_2 \\ r_3 & 0 & -r_1 \\ -r_2 & r_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Dátumtranszformáció kettős kvaternióval

- (15) egyenletben szereplő \mathbf{R} forgatási mátrix felírható a kettős kvaternió elemeivel

$$\begin{bmatrix} 1 & \vec{0} \\ \vec{0} & \mathbf{R} \end{bmatrix} = \mathbf{W}(\mathbf{r})^T \mathbf{Q}(\mathbf{r}) \quad (17)$$

ahol a

$$\mathbf{W}(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} r_0 & -\vec{\mathbf{r}}^T \\ \vec{\mathbf{r}} & r_0 \mathbf{I} - \mathbf{K}(\mathbf{r}) \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{Q}(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} r_0 & -\vec{\mathbf{r}}^T \\ \vec{\mathbf{r}} & r_0 \mathbf{I} + \mathbf{K}(\mathbf{r}) \end{bmatrix} \quad (18)$$

Dátumtranszformáció kettős kvaternióval

- Az eltolás \vec{t} vektora úgyszintén kifejezhető kettős kvaternióval

$$\mathbf{t} = \mathbf{W}(\mathbf{r})^T \mathbf{s} \quad (19)$$

ahol

$$\mathbf{t}^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \vec{t}^T \end{bmatrix} \quad (20)$$

Az eddigiek alapján a dátumtranszformáció kettős kvaternióval történő megoldása a következő formában adható meg

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{W}(\mathbf{r})^T \mathbf{s} + \mu \mathbf{W}(\mathbf{r})^T \mathbf{Q}(\mathbf{r}) \mathbf{b}_i \quad (21)$$

Dátumtranszformáció kettős kvaternióval

- A (13) egyenlet újra felírható az \mathbf{r} és \mathbf{s} kvaterniók kvadratikus függvényként. A részletes levezetés megtalálható Wang et al. (2014) munkájában.

$$\mathbf{F} = \mu \mathbf{r}^T \mathbf{C}_1 \mathbf{r} + N \mathbf{s}^T \mathbf{s} + \mu \mathbf{s}^T \mathbf{C}_2 \mathbf{r} + \mathbf{s}^T \mathbf{C}_3 \mathbf{r} + \mu^2 \mathbf{C}_4 + \mathbf{C}_5 \quad (22)$$

ahol a \mathbf{C}_1 , \mathbf{C}_2 , \mathbf{C}_3 mátrixok továbbá a \mathbf{C}_4 , \mathbf{C}_5 konstans értékei a következő egyenletekből számíthatók:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_1 &= -2 \sum_{i=1}^N \mathbf{Q}(\vec{\mathbf{a}}_i) \mathbf{W}(\vec{\mathbf{b}}_i)^T \\ \mathbf{C}_2 &= 2 \sum_{i=1}^N \mathbf{W}(\vec{\mathbf{b}}_i) \\ \mathbf{C}_3 &= -2 \sum_{i=1}^N \mathbf{Q}(\vec{\mathbf{a}}_i) \\ \mathbf{C}_4 &= \sum_{i=1}^N (\vec{\mathbf{a}}_i^T \vec{\mathbf{a}}_i) \\ \mathbf{C}_5 &= \sum_{i=1}^N (\vec{\mathbf{b}}_i^T \vec{\mathbf{b}}_i) \end{aligned} \quad (23)$$

Dátumtranszformáció kettős kvaternióval

- A kényszereket tartalmazó (11) és (12) egyenletek felhasználásával a legjobb kettős kvaternió amely megadja a forgatást a következő hiba függvény minimalizálásával számítható

$$F = \mu \mathbf{R}^T \mathbf{C}_1 \mathbf{r} + N \mathbf{s}^T \mathbf{s} + \mu \mathbf{s}^T \mathbf{C}_2 \mathbf{r} + \mathbf{s}^T \mathbf{C}_3 \mathbf{r} + \mu^2 \mathbf{C}_4 + \mathbf{C}_5 + \lambda_1 (\mathbf{r}^T \mathbf{r} - 1) + \lambda_2 (\mathbf{s}^T \mathbf{r})_i \quad (24)$$

amely függvényben a λ_1 és λ_2 jelöli a Lagrange multiplikátor konstansokat. A részletes levezetés elhagyásával a következő egyenleteket kapjuk Wang at al. (2014).

- Az \mathbf{s} kettős kvaternió az \mathbf{r} függvényében az alábbiak szerint számítható:

$$\mathbf{s} = -\frac{1}{2N} (\mu \mathbf{C}_2 \mathbf{r} + \mathbf{C}_3 \mathbf{r}) \quad (25)$$

Dátumtranszformáció kettős kvaternióval

- A μ méretarány szintén meghatározható az \mathbf{r} és \mathbf{s} függvényeként

$$\mu = \frac{\mathbf{r}^T \mathbf{C}_1 \mathbf{r} - \left[\frac{1}{2N} \mathbf{r}^T \mathbf{C}_2^T \mathbf{C}_2 \mathbf{r} + \frac{1}{2N} \mathbf{r}^T \mathbf{C}_3^T \mathbf{C}_2 \mathbf{r} \right]}{2\mathbf{C}_4} \quad (26)$$

- Az \mathbf{r} kvaternió az alábbi \mathbf{A} mátrix maximális sajátértékéhez tartozó sajátvektoraként számítható

$$\mathbf{A} = \frac{1}{N} \mathbf{C}_2^T \mathbf{C}_3 - \left(\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_1^T \right) \quad (27)$$

Dátumtranszformáció kettős kvaternióval

A kettős kvaternió alkalmazásán alapuló dátum transzformációs algoritmus megoldása végezetül az alábbiak szerint foglalható össze

- 1) *Input adatok a mindkét rendszerben adott közös pontok \mathbf{a}_i és \mathbf{b}_i koordinátái*
- 2) *A súlypontra vonatkozó koordináták számítása (28) egyenlet,*

$$\Delta \mathbf{a}_i = \mathbf{a}_i - \mathbf{a}_0 \quad , \quad \Delta \mathbf{b}_i = \mathbf{b}_i - \mathbf{b}_0 \quad (28)$$

ahol

$$\mathbf{a}_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i, \quad \mathbf{b}_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{b}_i$$

Dátumtranszformáció kettős kvaternióval

- 3) Az A mátrix számítása a $C1$, $C2$ és $C3$ mátrixok valamint a $C4$ és $C5$ konstansok felhasználásával (23) egyenlet. Ezek után számítjuk az A mátrix maximális sajátértékét, és a hozzá tartozó sajátvektort. Eredményként az r forogatást leíró egység kvaterniót kapjuk.
- 4) Ezután a μ méretarány (26) egyenlet és az s eltolást leíró kvaternió (25) egyenlet számítása következik
- 5) Végül az R forgatási mátrixot (15) vagy (17) egyenlet, a forgásszögeket (29) egyenlet, és a t eltolás paramétert számítjuk (19) egyenlet

Dátumtranszformáció kettős kvaternióval

- A forgásszögek, az \mathbf{R} forgatási mátrix elemeiből számíthatók

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}, \quad \alpha_X = \arctg\left(\frac{r_{23}}{r_{33}}\right), \quad \beta_Y = \arcsin(-r_{13}), \quad \gamma_Z = \arctg\left(\frac{r_{12}}{r_{11}}\right) \quad (29)$$

ahol α , β és γ az \mathbf{X} , \mathbf{Y} és \mathbf{Z} tengelyek körüli forgásszögeket jelölik.

- Mivel súlyponti koordináta rendszerben végezzük a számításokat az súlypont koordináták felhasználásával a \mathbf{t} eltolás paraméter értékét a (30) egyenlet alapján is kiszámíthatjuk.

$$\mathbf{a}_0 = \mathbf{t} + \mu \mathbf{R} \Delta \mathbf{b}_0 \quad (30)$$

$$\mathbf{t} = \mathbf{a}_0 - \mu \mathbf{R} \Delta \mathbf{b}_0 \quad (31)$$

Dátumtranszformáció kettős kvaternióval

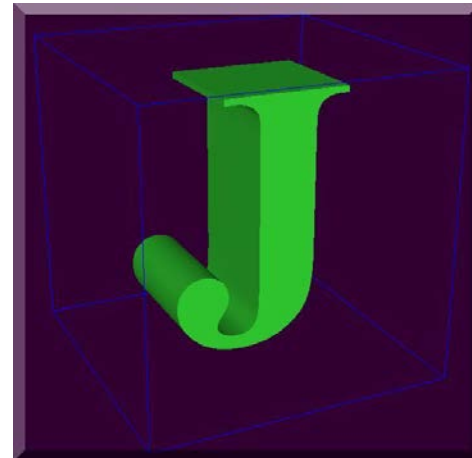
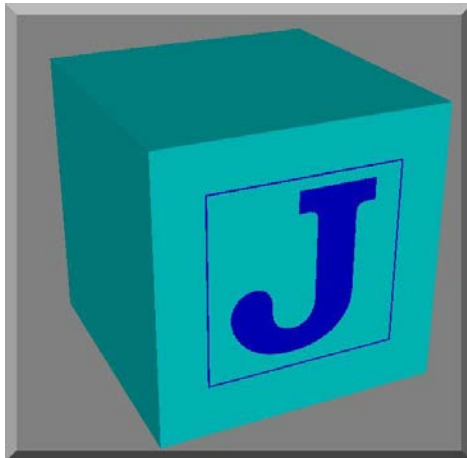
- Behelyettesítve a (19) egyenletbe a (31) egyenletet, rendezés után az \mathbf{s} kvaternió a (25) egyenlet helyett egyszerűbben is számítható

$$\mathbf{t} = \mathbf{W}(\mathbf{r})^T \mathbf{s} \quad \rightarrow \quad \mathbf{s} = \mathbf{t} \left[\left[\mathbf{W}(\mathbf{r})^T \right]^{-1} \right]^T \quad (32)$$

TH2 program

Abból a célból, hogy bemutassuk a (15), (17), (19), (23), (25) és (26) összefüggések érvényességét megismételtük Grafarend és Avange (2003) továbbá Wang et al. (2014) számításait.

Az eredmények teljes egyezést mutatnak úgy a transzformációs paraméterek mind pedig, a transzformált koordináták és maradék ellentmondások tekintetében.



TH2 program

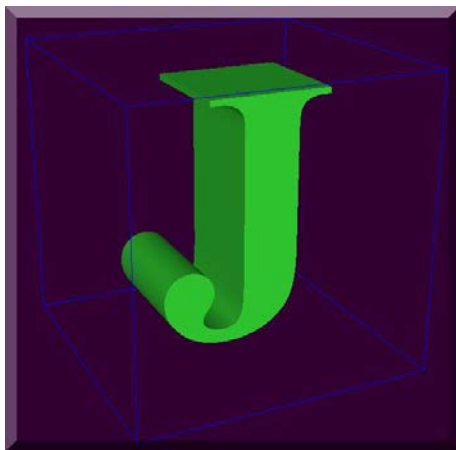
A **Térbeli Helmert** transzformáció kettős kvaternióval történő megoldására **J** nyelvű programot készítettük, amely Windows 32 és 64 bites platformon egyaránt futtatható.

NB. =====
NB. Térbeli HELMERT transzformáció kettős kvaternióval J nyelven
NB. (J602a) és (J804)
NB. Bursa-Wolf hasonlósági transzformáció
NB. Fájlból történő átszámítás
NB. Ismert transzformációs paraméterek: **p''**
NB. Transzformációs paraméterek közös pontok alapján: **FKJ tp CKJ**
NB. Új pontok transzformálása : **TH KJ**
NB. =====



Home Page: www.jsoftware.com

TH2 program



TH2 program

Grafarend és Avange (2003)

Coordinate pairs extracted from the local and WGS84 coordinate systems.

Site	Local coordinate system (System A)			WGS84 coordinate system (System B)		
	x	y	z	X	Y	Z
Solitude	4157222.543	664789.307	4774952.099	4157870.237	664818.678	4775416.524
Buoch Zeil	4149043.336	688836.443	4778632.188	4149691.049	688865.785	4779096.588
Hohenneuffen	4172803.511	690340.078	4758129.701	4173451.354	690369.375	4758594.075
Kuehlenberg	4177148.376	642997.635	4760764.800	4177796.064	643026.700	4761228.899
Ex Mergelaec	4137012.190	671808.029	4791128.215	4137659.549	671837.337	4791592.531
Ex Hof Asperg	4146292.729	666952.887	4783859.856	4146940.228	666982.151	4784324.099
Ex Kaisersbach	4138759.902	702670.738	4785552.196	4139407.506	702700.227	4786016.645

=====

KOORDINÁTA JEGYZÉK

Solitude	4157222.543	664789.307	4774952.099	4157870.237	664818.678	4775416.524
Bouch Zeil	4149043.336	688836.443	4778632.188	4149691.049	688865.785	4779096.588
Hohenneuffen	4172803.511	690340.078	4758129.701	4173451.354	690369.375	4758594.075
Kuehlenberg	4177148.376	642997.635	4760764.800	4177796.064	643026.700	4761228.899
Ex Mergelaec	4137012.190	671808.029	4791128.215	4137659.549	671837.337	4791592.531
Ex Hof Asperg	4146292.729	666952.887	4783859.856	4146940.228	666982.151	4784324.099
Ex Kaisersbach	4138759.902	702670.738	4785552.196	4139407.506	702700.227	4786016.645

n = 7 közös pont

=====

TH2 program

A mátrix

4840000812.6107607	6797.3602778054774	4449.1045040902682	11326.777577847242
6797.3602778054774	1830759441.9190657	1718881883.8685288	2336633587.9495964
4449.1045040902682	1718881883.8685288	51690149.170300066	825686706.84362614
11326.777577847242	2336633587.9495964	825686706.84362614	2957551221.5213947

sajátértékek, baloldali és jobboldali sajátvektorok

0.999999999999182676	3.9126447306007131e_6	8.9927464923568677e_7	4.7891704079319941e_7
2.420431872102207e_6	0.58473541340706447	0.49123001299988317	0.64558312449284594
2.1663738401594803e_6	0.7030732528868926	0.70387664657394755	0.101220884594855
2.4073178334356714e_6	0.40468814829125416	0.51307966314709841	0.75695228508252765

4840000812.6641178 1853142281.7415218 1853155553.2837615 4839987541.1218796

0.999999999999182676	3.9126447305208904e_6	8.9927464923564823e_7	4.7891704079325023e_7
2.420431872148934e_6	0.58473541340706459	0.49123001299988295	0.64558312449284583
2.1663738402155687e_6	0.70307325288689237	0.70387664657394744	0.10122088459485468
2.4073178334679565e_6	0.40468814829125405	0.51307966314709885	0.7569522850825281

maximális sajátérték

4840000812.6641178

TH2 program

r kvaternió = a maximális sajátértékhez tartozó sajátvektor

```
_0.99999999999182676  
_2.420431872102207e_6  
2.1663738401594803e_6  
2.4073178334356714e_6
```

R forgatási mátrix

```
0.99999999997902367 4.8146251797114124e_6 _4.3327593337811685e_6  
_4.8146461539525703e_6 0.99999999997669309 _4.8408533138640897e_6  
4.3327360267859272e_6 4.8408741744656066e_6 0.9999999999788971
```

μ méretarány

```
1.0000055825198519
```

t eltolás

```
641.88042527344078  
68.655345451901667  
416.39818478096277
```

TH2 program

Dual quaternion-based algorithm

Rotation matrix (R)	Translation vector (T)	Scale (μ)
$\begin{bmatrix} 1.000000000 & 0.000004815 & -0.000004333 \\ -0.000004815 & 1.000000000 & -0.000004841 \\ 0.000004333 & 0.000004841 & 1.000000000 \end{bmatrix}$	(641.8805, 68.6554, 416.3982)	1.000005583

R forgatási mátrix

```
0.99999999997902367 4.8146251797114124e_6 4.3327593337811685e_6
4.8146461539525703e_6 0.99999999997669309 4.8408533138640897e_6
4.3327360267859272e_6 4.8408741744656066e_6 0.9999999999788971
```

=====
Transzformációs paraméterek

Eltolás	Elforgatás	Méretarány
641.88042527344078	0 0	_0.998497670868 1.0000055825198519
68.65534545190167	0 0	0.893695764500
416.39818478096277	0 0	0.993087729859

=====

TH2 program

Residuals of each site after transformation.

Site	Dual quaternion-based algorithm		
	Δx	Δy	Δz
Solitude	0.0939	0.1353	0.1402
Buoch Zeil	0.0588	-0.0500	0.0136
Hohenneuffen	-0.0403	-0.0883	-0.0078
Kuehlenberg	0.0197	-0.0213	-0.0872
Ex Mergelaec	-0.0916	0.0140	-0.0059
Ex Hof Asperg	-0.0117	0.0067	-0.0549
Ex Kaisersbach	-0.0292	0.0035	0.0014

=====

MARADÉK ELLENTMONDÁSOK [mm]

PSZ	ex	ey	ez	e
Solitude	94	135	140	216
Bouch Zeil	59	_50	14	78
Hohenneuffen	_40	_88	_8	97
Kuehlenberg	20	_22	_87	92
Ex Mergelaec	_92	14	_5	93
Ex Hof Asperg	_12	7	_55	56
Ex Kaisersbach	_29	4	2	30

=====

TH2 program

=====
Transzformációs paraméterek

Eltolás		Elforgatás	Méretarány
641.88042527344078	0	0 _0.998497670868	1.0000055825198519
68.65534545190167	0	0 0.893695764500	
416.39818478096277	0	0 0.993087729859	

=====
MARADÉK ELLENTMONDÁSOK [mm]

PSZ	ex	ey	ez	e
Solitude	94	135	140	216
Bouch Zeil	59	_50	14	78
Hohenneuffen	_40	_88	_8	97
Kuehlenberg	20	_22	_87	92
Ex Mergelaec	_92	14	_5	93
Ex Hof Asperg	_12	7	_55	56
Ex Kaisersbach	_29	4	2	30

=====
Súlyegység középhibája: m0 = 0.077233660859330686
=====

q = r + Es kettős kvaternió

r	s
r0 = _0.999999999999182676000	s0 = _0.00020124595950307916
r1 = _0.00000242043187210221	s1 = _320.93984423488138000000
r2 = 0.00000216637384015948	s2 = _34.32639618885393400000
r3 = 0.00000240731783343567	s3 = _208.19987075258805000000

=====

Térbeli HELMERT transzformáció
kettős kvaternióval
Közös pontok

PSZ Forrás rendszer [x y z] -> TRANSZFORMÁCIÓ -> Cél rendszer [X Y Z]

=====

KOORDINÁTA JEGYZÉK

Solitude	4157222.543	664789.307	4774952.099	4157870.237	664818.678	4775416.524
Bouch Zeil	4149043.336	688836.443	4778632.188	4149691.049	688865.785	4779096.588
Hohenneuffen	4172803.511	690340.078	4758129.701	4173451.354	690369.375	4758594.075
Kuehlenberg	4177148.376	642997.635	4760764.800	4177796.064	643026.700	4761228.899
Ex Mergelaec	4137012.190	671808.029	4791128.215	4137659.549	671837.337	4791592.531
Ex Hof Asperg	4146292.729	666952.887	4783859.856	4146940.228	666982.151	4784324.099
Ex Kaisersbach	4138759.902	702670.738	4785552.196	4139407.506	702700.227	4786016.645

n = 7 közös pont

=====

Transzformációs paraméterek

Eltolás		Elforgatás	Méretarány
641.88042527344078	0 0	_0.998497670868	1.0000055825198519
68.65534545190167	0 0	0.893695764500	
416.39818478096277	0 0	0.993087729859	

=====

MARADÉK ELLENTMONDÁSOK [mm]

PSZ	ex	ey	ez	e
Solitude	94	135	140	216
Bouch Zeil	59	_50	14	78
Hohenneuffen	_40	_88	_8	97
Kuehlenberg	20	_22	_87	92
Ex Mergelaec	_92	14	_5	93
Ex Hof Asperg	_12	7	_55	56
Ex Kaisersbach	_29	4	2	30

=====

Súlyegység középhibája: m0 = 0.077233660859330686

=====

q = r + Es kettős kvaternió

r	s
r0 = _0.99999999999182676000	s0 = _0.00020124595950307916
r1 = _0.00000242043187210221	s1 = _320.93984423488138000000
r2 = 0.00000216637384015948	s2 = _34.32639618885393400000
r3 = 0.00000240731783343567	s3 = _208.19987075258805000000

=====

TH2 program

TH2 program

Wang at al. (2014)

Point features extracted from two neighboring LiDAR point clouds.

No.	Reference station			Unregistered station			
	x	y	z	x	y	z	
1	-91.406	53.344	8.320	-49.007	54.453	0.978	
2	-91.297	53.222	0.916	-47.365	54.435	-6.242	
3	-60.158	24.280	8.948	-36.514	13.733	3.642	
4	-60.135	24.278	1.521	-34.881	13.859	-3.608	
5	-56.298	-19.186	5.700	-53.378	-25.872	-4.187	
6	-13.269	-2.677	-1.444	-7.324	-32.695	-1.389	
7	-4.666	17.245	-1.605	9.587	-19.650	2.449	
8	-49.939	14.297	27.119	-36.532	-0.319	21.980	
9	-52.769	11.523	25.906	-39.932	-1.307	19.965	
10	-72.929	-8.630	27.146	-67.051	-8.834	15.017	
11	-46.500	-30.291	23.078	-54.124	-40.688	13.216	
12	-52.581	-22.934	5.676	-51.943	-30.962	-3.965	
13	-58.972	-17.511	18.862	-57.712	-23.376	8.397	
14	-55.429	-26.155	23.077	-59.650	-32.625	12.037	
15	-55.313	-26.131	23.039	-59.512	-32.705	12.071	
16	-63.467	27.962	26.981	-41.466	18.246	21.085	
17	-57.673	22.069	25.782	-39.133	10.234	20.247	
18	-49.687	14.083	-3.666	-29.781	-0.026	-8.062	

TH2 program

=====

KOORDINÁTA JEGYZÉK

1	_49.007	54.453	0.978	_91.406	53.344	8.320
2	_47.365	54.435	_6.242	_91.297	53.222	0.916
3	_36.514	13.733	3.642	_60.158	24.280	8.948
4	_34.881	13.859	_3.608	_60.135	24.278	1.521
5	_53.378	_25.872	_4.187	_56.298	_19.186	5.700
6	_7.324	_32.695	_1.389	_13.269	_2.677	_1.444
7	9.587	_19.650	2.449	_4.666	17.245	_1.605
8	_36.532	_0.319	21.980	_49.939	14.297	27.119
9	_39.932	_1.307	19.965	_52.769	11.523	25.906
10	_67.051	_8.834	15.017	_72.929	_8.630	27.146
11	_54.124	_40.688	13.216	_46.500	_30.291	23.078
12	_51.943	_30.962	_3.965	_52.581	_22.934	5.676
13	_57.712	_23.376	8.397	_58.972	_17.511	18.862
14	_59.650	_32.625	12.037	_55.429	_26.155	23.077
15	_59.512	_32.705	12.071	_55.313	_26.131	23.039
16	_41.466	18.246	21.085	_63.467	27.962	26.981
17	_39.133	10.234	20.247	_57.673	22.069	25.782
18	_29.781	_0.026	_8.062	_49.687	14.083	_3.666

n = 18 közös pont

=====

TH2 program

A mátrix

18959.85444877778	_ 214.38010388888878	2032.911286222223	9781.7721873333339
_ 214.38010388888878	_ 9107.9632554444452	_ 3745.2986920000003	_ 2132.828107111111
2032.911286222223	_ 3745.2986920000003	5194.5903638888904	_ 1512.8409907777782
9781.7721873333339	_ 2132.828107111111	_ 1512.8409907777782	_ 15046.481557222225

sajátértékek, baloldali és jobboldali sajátvektorok

_ 0.9611777758345228	0.24754192098248473	0.083230631518981357	0.089067067848070738
0.036681390786963967	_ 0.25466018309102495	0.93964274280843973	0.22555305940157894
_ 0.10309160306701531	_ 0.1209704115139959	0.2031575900673446	_ 0.96616006671422539
_ 0.25330590239630596	_ 0.92695056396901843	_ 0.26243317523212017	0.087906770537306583

21763.935590130524 _ 18442.082351569399 _ 9341.0348106536367 6019.1815720925424

_ 0.9611777758345228	0.24754192098248479	0.083230631518981385	0.089067067848070738
0.036681390786964016	_ 0.25466018309102473	0.93964274280843962	0.22555305940157894
_ 0.10309160306701531	_ 0.12097041151399587	0.20315759006734457	_ 0.96616006671422539
_ 0.25330590239630596	_ 0.92695056396901865	_ 0.26243317523212045	0.087906770537306556

maximális sajátérték

21763.935590130524

TH2 program

r kvaternió = a maximális sajátértékhez tartozó sajátvektor

```
_0.9611777758345228  
0.036681390786963967  
_0.10309160306701531  
_0.25330590239630596
```

R forgatási mátrix

```
0.85041648237653222 _0.49450709449998764 0.17959548989745161  
0.47938092098416463 0.86898119076225433 0.12274209831100616  
_0.2167619410752254 _0.018287252133517763 0.97605319389401402
```

μ méretarány

```
1.0003854423961862
```

t eltolás

```
_22.96560847319914  
29.396248211336868  
_2.2651953650426488
```

TH2 program

Dual quaternion-based algorithm

Rotation matrix (**R**)

Translation vector (**T**)

Scale factor (*s*)

```
[ 0.850416493  -0.494507078  0.179595486 ]  
[ 0.479380907  0.868981201  0.122742085 ]  
[ -0.216761931 -0.018287246  0.976053196 ]
```

-22.9656, 29.3962, -2.2652

1.000385435

R forgatási mátrix

```
0.85041648237653222  _0.49450709449998764  0.17959548989745161  
0.47938092098416463  _0.86898119076225433  0.12274209831100616  
_0.2167619410752254  _0.018287252133517763  0.97605319389401402
```

=====
Transzformációs paraméterek

```
          Eltolás          Elforgatás          Méretarány  
_22.96560847319914   7  10   3.072626208203   1.0003854423961862  
 29.39624821133687  _10 _20  _46.316865945584  
  _2.26519536504265  _30 _10  _38.975171224272  
=====
```

```

=====
                          Transzformációs paraméterek
                          Eltolás                Elforgatás                Méretarány
                _22.96560847319914   7  10   3.072626208203   1.0003854423961862
                29.39624821133687  _10 _20  _46.316865945584
                _2.26519536504265  _30 _10  _38.975171224272
=====

```

```

=====
                          MARADÉK ELLENTMONDÁSOK [mm]
PSZ      ex      ey      ez      e
1        14      _7      _1      16
2        14      _14     1      20
3        11      9      _10     17
4        10      5      _1      11
5        32     21      5      39
6        3      32     _9      33
7       _17     33     _12     39
8        _1     _1     _5      6
9       _65    _39     _6     76
10       12    _35     47     60
11       9     17     _42     46
12     _30    _18    _17     39
13      19     60    _14     64
14     _19    _62     57     86
15     _66    _39     14     78
16      14     1      0      14
17      10     57    _21     61
18      50    _19     13     55
=====

```

Súlyegység középhibája: m0 = 0.030147998487098711

```

=====
q = r + Es kettős kvaternió
r      s
r0 =  _0.96117777583452280000  s0 =  _1.64956472764118560000
r1 =   0.03668139078696396700  s1 =   14.87689913731836300000
r2 =  _0.10309160306701531000  s2 =  _11.17730288943721600000

r3 =  _0.25330590239630596000  s3 =   0.44399465910073477000
=====

```



Térbeli HELMERT transzformáció
kettős kvaternióval
Közös pontok

PSZ Forrás rendszer [x y z] -> TRANSZFORMÁCIÓ -> Cél rendszer [X Y Z]

	KOORDINÁTA JEGYZÉK					
1	_49.007	54.453	0.978	_91.406	53.344	8.320
2	_47.365	54.435	_6.242	_91.297	53.222	0.916
3	_36.514	13.733	3.642	_60.158	24.280	8.948
4	_34.881	13.859	_3.608	_60.135	24.278	1.521
5	_53.378	_25.872	_4.187	_56.298	_19.186	5.700
6	_7.324	_32.695	_1.389	_13.269	_2.677	_1.444
7	9.587	_19.650	2.449	_4.666	17.245	_1.605
8	_36.532	_0.319	21.980	_49.939	14.297	27.119
9	_39.932	_1.307	19.965	_52.769	11.523	25.906
10	_67.051	_8.834	15.017	_72.929	_8.630	27.146
11	_54.124	_40.688	13.216	_46.500	_30.291	23.078
12	_51.943	_30.962	_3.965	_52.581	_22.934	5.676
13	_57.712	_23.376	8.397	_58.972	_17.511	18.862
14	_59.650	_32.625	12.037	_55.429	_26.155	23.077
15	_59.512	_32.705	12.071	_55.313	_26.131	23.039
16	_41.466	18.246	21.085	_63.467	27.962	26.981
17	_39.133	10.234	20.247	_57.673	22.069	25.782
18	_29.781	_0.026	_8.062	_49.687	14.083	_3.666

n = 18 közös pont

Transzformációs paraméterek

Eltolás	Elforgatás	Méretarány
_22.96560847319914	7 10	3.072626208203
29.39624821133687	_10 _20	_46.316865945584
_2.26519536504265	_30 _10	_38.975171224272

MARADÉK ELLENTMONDÁSOK [mm]

PSZ	ex	ey	ez	e
1	14	_7	_1	16
2	14	_14	1	20
3	11	9	_10	17
4	10	5	_1	11
5	32	21	5	39
6	3	32	_9	33
7	_17	33	_12	39
8	_1	_1	_5	6
9	_65	_39	_6	76
10	12	_35	47	60
11	9	17	_42	46
12	_30	_18	_17	39
13	19	60	_14	64
14	_19	_62	57	86
15	_66	_39	14	78
16	14	1	0	14
17	10	57	_21	61
18	50	_19	13	55

Súlyegység középpontja: m0 = 0.030147998487098711

q = r + Es kettős kvaternió

r	s
r0 =	_0.9611777583452280000
r1 =	0.03668139078696396700
r2 =	_0.10309160306701531000
r3 =	_0.25330590239630596000
s0 =	_1.64956472764118560000
s1 =	14.87689913731836300000
s2 =	_11.17730288943721600000
s3 =	0.44399465910073477000

TH2 program

Összefoglalás

- *Egy merev test 3D térbeli transzformációja, különösen a térbeli tájékozás az egyik legfontosabb és legkritikusabb feladat a geodéziában, fotogrammetriában, navigációban, a lézershakkenner és LiDAR mérések feldolgozásában, robotkar manipulálásában, az animációban, többek között.*
- *Jelenleg a **térbeli forgatások** meghatározásának legnépszerűbb módszere a **forgatási mátrix**, **Euler szögek**, **Rodriguez vektor** és **kvaterniók** alkalmazása.*
- *A **forgatási mátrix** újranormalizálása nehézkes, az **Euler szögek** alkalmazása szingularitásokhoz vezet és a **Rodriguez vektorok** alkalmazása sem valósítható meg egy egyszerű számítási algoritmussal.*

Összefoglalás

- **Kvaterniók** alkalmazása látszik megfelelőnek a 3D forgatás leírásához kevés számú paraméterrel.
- **Egységkvaterniót alkalmazva** a térbeli forgatás leírására, hét transzformációs paramétert kell meghatároznunk, nevezetesen először **a három forgásszöget**, ezután **a méretarány paramétert**, és végül **a három eltolás vektort**.
- Az előadásban bemutatott módszer **kettős kvaterniót** alkalmaz a térbeli forgatási mátrix és az eltolásvektor meghatározásához.
- Ismerteti a kettős kvaternió alapú geodéziai dátumtranszformáció megoldását linearizálással a Bursa-Wolf dátumtranszformációs modellben.

Összefoglalás

- **Zárt képlet felhasználásával**, a kettős kvaternió valós és kettős részének meghatározásával számítottuk az elforgatást és az eltolást, azaz **hat transzformációs paraméter értékét szimultán határoztuk meg**.
- Bemutattuk a feladat megoldásához felhasznált módszert, és egyenleteket.
- Az eljárás hatékonyságát és alkalmazhatóságát 7 közös pont esetében **helyi és WGS84 koordináta rendszerek közötti**, továbbá 18 közös pont esetén **szomszédos LiDAR álláspontok közötti** transzformáción teszteltük.
- A számítások azt mutatják, hogy a kettős kvaternió gyors és megbízható eredményt ad.

Összefoglalás

- Ennek az algoritmusnak a legnagyobb előnye, hogy **tetszőleges nagyságú szögelfordulások esetében is alkalmazható** a transzformációs paraméterek számításához.
- A bemutatott megoldás eredményeként az r kvaternió r_0, r_1, r_2, r_3 elemeit egy valódi szimmetrikus mátrix sajátvektorához tartozó maximális sajátértékének meghatározásával számítjuk.

Befejezésként megállapíthatjuk, hogy **a kettős kvaternió felhasználásán alapuló algoritmus alkalmas a hasonlósági transzformáció paramétereinek számításához.**

A bemutatott megoldás egy új választható módszer a hasonlósági transzformáció rövid leírására.

Összefoglalás



PAPP ERIK

KVATERNIÓ TRILÓGIA

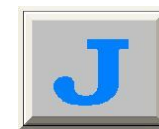
2013

GEODÉZIAI DÁTUMTRANSZFORMÁCIÓ *KVATERNIÓVAL*



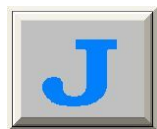
2015

**GEODÉZIAI DÁTUMTRANSZFORMÁCIÓ ITERÁCIÓS MEGOLDÁSA
*KVATERNIÓVAL***



2017

***KETTŐS KVATERNIÓVAL* GEODÉZIAI ALKALMAZÁSA**



Összefoglalás



Hamilton-féle kvaternió

négy skalár változó

$$Q = q_0 + q_1 \mathbf{i} + q_2 \mathbf{j} + q_3 \mathbf{k} = q_0 + \mathbf{q}$$

↑ valós ↑ komplex

Clifford-féle kettős kvaternió

nyolc skalár változó

$$\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{r} + \mathcal{E} \mathbf{s}$$

↑ valós ↑ kettős művelet (dual operator) ↑ kettős rész



$$\hat{\mathbf{q}} = \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad n_x \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad n_y \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad n_z \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \begin{bmatrix} 0 & \frac{t_x}{2} & \frac{t_y}{2} & \frac{t_z}{2} \end{bmatrix}$$

Összefoglalás

Térbeli Helmert-féle transzformáció



Klasszikus

$$\mathbf{a}_0 = \mathbf{t} + \mu \mathbf{R} \Delta \mathbf{b}_0$$

Kettős kvaternióval

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{W}(\mathbf{r})^T \mathbf{s} + \mu \mathbf{W}(\mathbf{r})^T \mathbf{Q}(\mathbf{r}) \mathbf{b}_i$$

*Friedrich Robert Helmert
(1843-1917)*

Hivatkozások

- Awange JL, Grafarend EW** (2005): *Solving Algebraic Computational Problems in Geodesy and Geoinformatics, The answer to modern Challenges*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York.
- Charles M**, (1830): *Note sur les propriétés du système de deux corps semblables entr'uux et placés d'une manière quelconque dans l'espece; et sur le déplacement fini ou infiniment petit d'un corps solide libre*. *Bull Sci. Math. Astron. Phys. Chim.* 14(XIV), 321-326
- W.K. Clifford** (1873): *Preliminary sketch of biquaternions*. *Proc. London Math. Soc.*, 4:381-395
- W.K. Clifford** (1882): *Mathematical Papers*. Macmillan, London
- Grafarend EW, Awange LJ** (2003): *Nonlinear analysis of the threedimensional datum transformation [conformal group $C7(3)$]*. *J. Geod.* 77, 66–76.
- Hamilton WR** (1844): *On quaternions, or on a new system of imaginaries algebra*. *Phil. Mag.* 25(3), 489-495
- Hamilton WR** (1853): *Lectures on quaternions: containing a systematic statement of a New mathematical method*. Hodges and Smith, Dublin.
- Horn BKP** (1987): *Closed-form solution of absolut orientation using unit quaternions*. *J. Opt. Soc. Am. A*, 4(4), 629-642.
- Molodenskii M, Eremeev V, M.I., Y** (1962): *Methods for study of the external gravitational field and figure of the earth*. Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem
- R. M Murray, S. S. Sastry, L. Zexiang** (1994): *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*. CRC Press, USA, ISBN 0-849-37981-4.
- Prosková J**, (2011): *Application of dual quaternions algoritms for geodetic datum transformation*. *J. Appl. Marh.* 4(2), 225-236
- Prosková J**, (2012): *Discovery of dual quaternions for geodesy*. *J. Geometry Graphics* 16(2), 195-209
- Shan YZ, Chen Y, Zheng DH** (2006): *A quaternion-based geodetic datum transformation algorithm*. *J. Geod.* 80, 233–239.
- Vaníček P, Steeves RR** (1996): *Transformation of coordinates between two horizontal geodetic datums*. *J. Geod.*, 70, 740-745
- Vaníček P, Novák P, Craymer MR, Pagiatakis S** (2002): *On the correct determination of transformation parameters of a horizontal geodetic datum*. *Geomatica*, 56(4), 329–340.
- Yang Y** (1999): *Robust estimation of geodetic datum transformation*. *J. Geod.*, 73, 268–274.
- Yangbo Wang, Yunjia Wang, Kan Wu, Huachao Yang, Hua Zhang** (2014): *A dual quaternion-based, closed-form pairwise registration algorithm for point clouds*. *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing* 94, 63-69
- Zeng H, Yi Q** (2011): *Quaternion-Based Iterative Solution of Three-Dimensional Coordinate Transformation Problem*. *J. of Computers*, 6(7), 1361-1368.

VÉGE