

GEODÉZIAI DÁTUMTRANSZFORMÁCIÓ ITERÁCIÓS MEGOLDÁSA KVATERNIÓVAL

Papp Erik

Szent István Egyetem Ybl Miklós Építéstudományi Kar

ÖSSZEFOGLALÁS

A dátumtranszformáció az egyik leggyakrabban előforduló feladat a geodéziában, forogrammetriában, térinformatikában, az animációban és a számítógépes megjelenítésben. A hagyományos módszer hátránya, hogy a forgásszögek meghatározása erősen függ a paraméterek kezdeti értékeitől, amely szuper nagy forgásszögek esetén nem ad megoldást. A dolgozatban ismertetett módszer egységkvaterniót alkalmaz a térbeli forgatási mátrix meghatározásához. Ismerteti a kvaternó alapú geodéziai dátumtranszformáció iterációs megoldását linearizálással a Bursa-Wolf dátum transzformációs modellben. A számítások azt mutatják, hogy a kvaternió alapú iterációs megoldás független a paraméterek kezdeti értékeitől, gyors és megbízható eredményt ad. Az iteráció eredményeként a Q kvaternió q_0, q_1, q_2, q_3 elemeit és a λ méretarányt kapjuk. Ennek az algoritmusnak a legnagyobb előnye, hogy tetszőleges nagyságú szögelfordulások esetében is alkalmazható a transzformációs paraméterek számításához.

1 Bevezetés

A térbeli (3D) koordináta transzformáció az egyik leggyakoribb feladat a geodéziában, forogrammetriában, térinformatikában, a számítógépes animációban és más kutatási területeken. Ez magában foglalja a térbeli adatok (koordináták, képek, térképek, modellek, pontfelhők stb.) transzformálását a forrás koordináta rendszerből a cél koordináta rendszerbe. Jelenleg a legtöbbször alkalmazott modell a hétparaméteres hasonlósági transzformációs modell. Dátumtranszformáció esetén hét transzformációs paramétert kell kiszámítanunk, nevezetesen három eltolást, három elforgatást és a méretarány paramétert a mindkét rendszerben adott közös pontok koordinátáinak felhasználásával. Ebben a dolgozatban a Bursa-Wolf hasonlósági transzformációs modellt alkalmazzuk, amelyet klasszikus modellnek, hétparaméteres modellnek, térbeli Helmert modellnek vagy konform csoportnak $C7(3)$ is neveznek. A geodéziában, mivel a forgásszögek általában nagyon kicsinyek, vagyis a két koordináta rendszer tengelyei közel párhuzamosak, lineáris egyszerűsített modellt alkalmaznak Detrekői(1991), Kleusberg(1996), Leick (2004), Wellenhoff(1994, 2001) amely paraméterei egyszerűen számíthatók. Számos külföldi és hazai publikáció foglalkozik a geodéziai dátumtranszformációval, mint például Welsch (1993), Grafarend et al. (1995), Vanicek and Steeves (1996), Yung (1999), Papp at al. (1997), (2002), (2005) és linearizálás

szükséges a transzformációs paraméterek meghatározásához azért, hogy egyszerűsítsük a modellt. Grafarend és Awange (2003, 2005), Gauss-Jacobi kombinatorikai és procrustes algoritmust javasolt 3D dátumtranszformációs feladat megoldásához.

A transzformációs paraméterek számításához nemlineáris, túlhatározott egyenleteket használnak a legkisebb négyzetek módszere szerinti kiegyenlítéssel. Ezen megoldások két csoportba sorolhatók: *iterációs* algoritmusok és *analitikus* algoritmusok. Ezen algoritmusok közötti fő különbség a forgatási mátrix eltérő értelmezésének köszönhető, amely különböző linearizációs modelleket eredményez. A forgatási paramétereket általában három forgásszöggel szokás megadni. A forgatási mátrixban kilenc ismeretlen szerepel, amelyekre hat ortogonalitási és normalizálási feltétel teljesül. Az iterációs algoritmusok alkalmazásakor linearizálás és a paraméterek számításához jól közelítő értékek szükségesek. Jelenleg az *analitikus* algoritmusok két fő típusa használatos, a *procrustes* algoritmus Grafarend és Awange (2003, 2005) és a *kvaternió alapú* algoritmus Horn (1987), Shen (2006), Zeng és Yi (2011), Papp (2013).

Ebben a dolgozatban megvizsgáljuk a dátumtranszformáció megoldását a kvaternió algebra jelölésével illetve alkalmazásával és bemutatjuk a kvaternió alapú dátumtranszformációs algoritmus iterációs megoldását.

2 A kvaternió és a 3D forgatási mátrix

Sir William Rowan Hamilton 1843-ban fedezte fel a kvaterniókat egy 3D vektor ábrázolására. A kvaternió nagyon alkalmas a forgatás egységsugarú gömbön történő leírására. Ezért széleskörben alkalmazzák mozgó objektum helyzetének leírására mint például űrhajó, repülőgép vagy gépjármű továbbá a robotok irányításában az animációban, fizikában, mechanikában és más kutatási területeken.

A Q kvaternió komplex számként a következőképpen definiálható

$$Q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k = q_0 + \mathbf{q} \quad (1)$$

ahol $i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j$

és a képzetes rész $\mathbf{q} = q_1i + q_2j + q_3k$ egy 3D vektort jelöl.

A megfelelő konjugált kvaternió az alábbiak szerint jelölhető

$$Q^* = q_0 - q_1i - q_2j - q_3k = q_0 - \mathbf{q} \quad (2)$$

A Q kvaternió oszlopvektor formában is kifejezhető az $(1 \ i \ j \ k)$ egységvektorok felhasználásával

$$\mathbf{Q} = (q_0 \ q_1 \ q_2 \ q_3)^T = (q_0 \ \mathbf{q}^T)^T \quad (3)$$

ahol q_0 a valós rész, $\mathbf{q} = (q_1q_2q_3)^T$ a képzetes rész, egy 3D vektort és T a transzponálást jelöli.

Egy 3D \mathbf{p} vektor mindig megadható kvaterniókal a következők szerint

$$\mathbf{p} = 0 + p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j} + p_3\mathbf{k} = 0 + \mathbf{p} \quad (4)$$

A kvaternió hossza

$$\|Q\| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} \quad (5)$$

Ha $\|Q\|=1$, akkor a Q kvaterniót egység kvaterniónak nevezzük.

A Q kvaternió definíciójának megfelelően könnyen igazolhatók az alábbi tulajdonságok

$$k(P+Q) = \lambda P + \lambda Q \quad (6)$$

$$PQ = p_0q_0 + p_0\mathbf{q} + q_0\mathbf{p} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + \mathbf{p} \times \mathbf{q} \quad (7)$$

$$C(P+Q) = CP + CQ \quad (8)$$

$$CPQ = (CP)Q = C(PQ) \quad (9)$$

$$(PQ)^* = Q^*P^* \quad (10)$$

$$QQ^* = \|Q\| \quad (11)$$

$$Q^{-1} = \frac{Q^*}{\|Q\|} \quad (12)$$

ahol k egy valós szám, C , P és Q kvaterniók, a Q^{-1} a Q kvaternió inverzét jelöli, a \cdot és \times a skaláris és a vektoriális szorzat jele. Vektorok skaláris és vektoriális szorzata a következőképpen definiálható

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{p}^T \mathbf{q}, \quad \mathbf{p} \times \mathbf{q} = C(\mathbf{p})\mathbf{q} \quad (13)$$

A kvaternió szorzat $C = PQ$ (7) egyenlet oszlopvektor és mátrix szorzataként kifejezhető

$$C = \begin{bmatrix} c_0 \\ \mathbf{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_0 & -\mathbf{p}^T \\ \mathbf{p} & p_0\mathbf{I} + C(\mathbf{p}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 & -\mathbf{q}^T \\ \mathbf{q} & q_0\mathbf{I} - C(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\text{ahol } C(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} 0 & -p_3 & p_2 \\ p_3 & 0 & -p_1 \\ -p_2 & p_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

\mathbf{I} egy 3×3 egységmátrix. Bevezetve a következő mátrix jelöléseket

$$\mathbf{P}^+ = \begin{bmatrix} p_0 & -\mathbf{p}^T \\ \mathbf{p} & p_0\mathbf{I} + C(\mathbf{p}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}^- = \begin{bmatrix} q_0 & -\mathbf{q}^T \\ \mathbf{q} & q_0\mathbf{I} - C(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} \quad (15)$$

ahol a + és – felsőindex a $C(\cdot)$ mátrix előjelét jelöli és behelyettesítve a (15) egyenletet a (14) egyenletbe, eredményül a szorzat kvaternió vektor és mátrix formáját kapjuk:

$$C = P^+ Q = Q^- P \quad (16)$$

Egyszerűen bizonyítható, hogy a konjugált kvaternió a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

$$(P^*)^+ = (P^+)^T, \quad (P^*)^- = (P^-)^T \quad (17)$$

Jól ismert módszer egy 3D p vektor s vektorba történő forgatására kvaternióval a következő:

$$S = QPQ^* \quad (18)$$

ahol a p és s vektorokból képzett kvaterniók a P és S , Q pedig egység kvaternió, amely az alábbiak szerint definiálható

$$Q = \cos \frac{\theta}{2} + e_n \sin \frac{\theta}{2} \quad (19)$$

ahol $e_n = e_1 i + e_2 j + e_3 k$ és $e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1$, amely egy 3D egység vektor, θ a forgásszög az e_n egységvektor körül és az $e_n \cdot e_n = -1$. Összehasonlítva a (19) egyenletet az (1) egyenlettel, nyilvánvaló, hogy

$$q_0 = \cos \frac{\theta}{2}, \quad q_1 = e_1 \sin \frac{\theta}{2}, \quad q_2 = e_2 \sin \frac{\theta}{2}, \quad q_3 = e_3 \sin \frac{\theta}{2}$$

A (16) és (17) egyenletek alapján a (18) egyenlet kifejezhető vektor-mátrix formában

$$S = Q^+ P^+ Q^* \quad (20)$$

A (20) egyenlet a következőképpen alakítható át

$$S = Q^+ P^+ Q^* = Q^+ (Q^*)^- P = Q^+ (Q^-)^T P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{R} \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (q_0^2 - \mathbf{q}^T \mathbf{q}) \mathbf{I} + 2(\mathbf{q} \mathbf{q}^T + q_0 \mathbf{C}(\mathbf{q})) \end{bmatrix} P \quad (21)$$

Az \mathbf{R} 3×3 forgatási mátrix

$$\mathbf{R} = (q_0^2 - \mathbf{q}^T \mathbf{q}) \mathbf{I} + 2(\mathbf{q} \mathbf{q}^T + q_0 \mathbf{C}(\mathbf{q})) \quad (22)$$

ahol a \mathbf{q} egy 3D vektort jelöl, \mathbf{I} egy 3×3 egységmátrix ld. a (14) egyenletet.

Ezek után a forgásszögek, az \mathbf{R} forgatási mátrix elemeiből számíthatók

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}, \quad \alpha_X = \arctg\left(\frac{r_{23}}{r_{33}}\right), \quad \beta_Y = \arcsin(-r_{13}), \quad \gamma_Z = \arctg\left(\frac{r_{12}}{r_{11}}\right) \quad (23)$$

ahol α , β és γ az \mathbf{X} , \mathbf{Y} és \mathbf{Z} tengelyek körüli forgásszögeket jelölik.

3 Kvaternió alapú dátumtranszformáció iterációs megoldásának modellje

Legtöbb dátumtranszformációs modell hétparaméteres, amelyek két különböző geodéziai dátumhoz tartozó közös pontok felhasználásával kerülnek kiszámításra. A jól ismert Bursa-Wolf hasonlósági transzformációs modell a következők szerint írható fel:

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{t} + \lambda \mathbf{R} \mathbf{b}_i \quad (24)$$

ahol $\mathbf{a}_i = [X_i Y_i Z_i]^T$ és $\mathbf{b}_i = [X_i Y_i Z_i]^T$ ($i=1, \dots, n$) a két különböző rendszerben adott közös pontok 3D koordinátái, $\mathbf{t} = (t_x t_y t_z)^T$ jelöli a három eltolás paramétert, λ a méretarány tényező és a 3×3 -as \mathbf{R} forgatási mátrix három forgatási paramétert tartalmaz. Nyilvánvaló, hogy hét paraméter meghatározásához a közös pontok számának \mathbf{a}_i , \mathbf{b}_i ($i=1, \dots, n$), nagyobbak vagy egyenlőnek kell lennie, mint három.

Határozzuk meg a súlypontra vonatkozó $\Delta \mathbf{a}_i, \Delta \mathbf{b}_i$ koordinátákat:

$$\Delta \mathbf{a}_i = \mathbf{a}_i - \mathbf{a}_0, \quad \Delta \mathbf{b}_i = \mathbf{b}_i - \mathbf{b}_0 \quad (25)$$

ahol $\mathbf{a}_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{b}_i$. Behelyettesítve a (25) egyenletet a (24) egyenletbe a következőt kapjuk

$$\Delta \mathbf{a}_i = \Delta \mathbf{t} + \lambda \mathbf{R} \Delta \mathbf{b}_i \quad (26)$$

A (26) egyenlet linearizálása után a közvetítő egyenlet

$$\mathbf{V}_i = \mathbf{B}_i \delta \mathbf{x} - \mathbf{l} \quad (27)$$

ahol $\mathbf{V}_i = [V_{xi} \ V_{yi} \ V_{zi}]^T$ jelöli a $\Delta \mathbf{a}_i$ változásait, $\delta \mathbf{x} = [dq_0 \ dq_1 \ dq_2 \ dq_3 \ d\lambda]^T$ az ismeretlen $\mathbf{x} = [q_0 \ q_1 \ q_2 \ q_3 \ \lambda]^T$ vektor javításai és \mathbf{B}_i egy 3×5 koefficiens mátrix:

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} & K_1 \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} & K_2 \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} & K_3 \end{bmatrix} \quad (28)$$

$\mathbf{l}_i = [l_{xi} \ l_{yi} \ l_{zi}]^T$ egy konstans vektor. A \mathbf{B}_i koefficiens mátrix és az \mathbf{l}_i tisztatag vektor elemei az alábbiak:

$$\begin{aligned}
 B_{11} &= 2\lambda(-q_3\Delta x + q_2\Delta z), & B_{12} &= 2\lambda(q_2\Delta y + q_3\Delta z) \\
 B_{13} &= 2\lambda(-2q_2\Delta x + q_1\Delta y + q_0\Delta z), & B_{14} &= 2\lambda(-2q_3\Delta x - q_0\Delta y + q_1\Delta z) \\
 B_{21} &= 2\lambda(q_3\Delta x - q_1\Delta z), & B_{22} &= 2\lambda(q_2\Delta x - 2q_1\Delta y - q_0\Delta z) \\
 B_{23} &= 2\lambda(q_1\Delta x + q_3\Delta z), & B_{24} &= 2\lambda(q_0\Delta x - 2q_3\Delta y + q_2\Delta z) \\
 B_{31} &= 2\lambda(-q_2\Delta x + q_1\Delta y), & B_{32} &= 2\lambda(q_3\Delta x + q_0\Delta y - 2q_1\Delta z) \\
 B_{33} &= 2\lambda(-q_0\Delta x + q_3\Delta y - 2q_2\Delta z), & B_{34} &= 2\lambda(q_1\Delta x + q_2\Delta y) \\
 K_1 &= [I - 2(q_2^2 + q_3^2)]\Delta x + 2\Delta y(q_1q_2 - q_0q_3) + 2\Delta z(q_0q_2 + q_1q_3) \\
 K_2 &= 2\Delta x(q_0q_3 + q_1q_2) + [I - 2(q_1^2 + q_3^2)]\Delta y + 2\Delta z(q_2q_3 - q_0q_1) \\
 K_3 &= 2\Delta x(q_1q_3 - q_0q_2) + 2\Delta y(q_0q_1 + q_2q_3) + [I - 2(q_1^2 + q_2^2)]\Delta z
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 l_{xi} &= \Delta X_i - \lambda K_1 \\
 l_{yi} &= \Delta Y_i - \lambda K_2 \\
 l_{zi} &= \Delta Z_i - \lambda K_3
 \end{aligned}$$

Mivel a Q egység kvaternió a következő kényszernek kell teljesülnie:

$$q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1 \quad (29)$$

A (29) egyenlet linearizálása után a

$$C\delta x - W_x = 0 \quad (30)$$

alakot kapjuk, ahol

$$C = [q_0 \ q_1 \ q_2 \ q_3 \ 0] \text{ és } W_x = (I - q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 - q_3^2) / 2 \quad (31)$$

Amikor a közös pontok száma $n \geq 3$, akkor $3n$ közvetítő egyenlet írható fel ld. a (27), az alábbiak szerint

$$V_i = B_i\delta x - l \quad (32)$$

ahol $V = \begin{bmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix}$, $l = \begin{bmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{bmatrix}$. Ezek után kiegyenlítéssel számíthatjuk a

transzformációs paramétereket. A feladat kiegyenlítés közvetítő egyenletekkel és kényszerfeltételekkel (IV. kiegyenlítési csoport) Detrekői(1991).

A δx változások vektora a következő mátrix egyenlettel számítható

$$\delta x = (N_b^{-1} - N_b^{-1}C^T N_c^{-1}CN_b^{-1})W + N_b^{-1}C^T N_c^{-1}W_x \quad (33)$$

ahol

$$N_b = B^T B, \quad W = B^T l, \quad N_c = CN_b^{-1}C^T \quad (34)$$

Mivel a (33) mátrixegyenlet mindkét oldalát balról szorozzuk az N_b^{-1} mátrixszal ezért az kiemelhető, végül a δx változások vektorát a következő mátrix egyenlettel számítjuk

$$\delta x = N_b^{-1} \left((I - C^T N_c^{-1} C N_b^{-1}) W \right) + C^T N_c^{-1} W_x \quad (35)$$

ahol I egy 5x5 egység mátrix.

A paraméterek számítását a klasszikus Gauss-Newton iterációs módszerrel végeztük. Először jó közelítő értékeket vettünk föl az ismeretlen x vektor elemeire és kiszámítottuk a δx változásokat. Az $x = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$ vagy $x = [0,7 \ 0,7 \ 0,7 \ 0,7 \ 1]^T$ kezdő értékekkel végezhetjük az iterációt. Abban az esetben, ha a kvaternió kezdőértékének nullát választunk és a méretarányunk egyet, akkor a B koefficiens mátrix (28) elemei a K_1 , K_2 és K_3 elemek kivételével nullák lesznek, az N_b^{-1} inverz mátrix nem számítható. Amennyiben a δx vektor minden eleme kisebb, mint az előre megadott tolerancia, akkor a forgatási mátrix, a forgatások és az eltolás értékek számítása következik. Ellenkező esetben az iterációt mindaddig ismétljük egy jobban közelítő értékkel, ameddig a változások értékei kisebbek lesznek a megadott tolerancia értékénél.

A kvaternió algebra alkalmazásán alapuló dátum transzformációs algoritmus iterációs megoldása végezetül az alábbiak szerint foglalható össze

1. A súlypontra vonatkozó $\Delta a_i, \Delta b_i$ koordináták számítása (25) egyenlet
2. Az iteráció kezdőértékeinek felvétele: $x = [q_0 \ q_1 \ q_2 \ q_3 \ \lambda]^T = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$
3. A δx változások számítása (35) egyenlet
4. Ha a δx vektor minden eleme kisebb a megadott ε toleranciánál, melynek értéke $\varepsilon = 1E^{-9}$ akkor folytatás a 6. lépésnél
5. Ha a δx vektor minden eleme nagyobb a megadott toleranciánál, akkor újabb iteráció számítása következik az $x + \delta x$ új kezdőértékkel, $x^{k+1} = x^k + \delta x^k$, folytatás a 3. lépésnél
6. Az R forgatási mátrix számítása (22) egyenlet, forgatások számítása (23) egyenlet
7. t eltolás paraméter számítása (24) egyenlet, az a_0, b_0 súlypont koordináták felhasználásával

4 THI program

A Térbeli Helmert transzformáció Iterációs megoldására az alábbiakban ismertetett *J nyelvű* programot készítettük (2. melléklet). A program fájlból történő betöltése után először transzformációs paramétereket határozzunk meg a \mathbf{p}' bevitele után megjelenő listából.

4.1 Ismert transzformációs paraméterek esetén a program az E_x, E_y, E_z eltolás értékeket, a Q kvaternió q_0, q_1, q_2, q_3 elemeinek értékeiket és a λ méretarányt kéri.

4.2 Ismeretlen transzformációs paraméterek esetén, a mindkét rendszerben adott, forrás- és célkoordinátákat tartalmazó FKJ és CKJ közös pontok koordinátáit tartalmazó fájlok betöltése után, a program kiszámítja a transzformációs paramétereket. Az E_x, E_y, E_z eltolás értékeket, az α, β, γ elforgatásokat a λ méretarányt, a Q kvaternió q_0, q_1, q_2, q_3 elemeit. Ezek után a maradék ellentmondások számítása következik. A program a közös pontok alapján meghatározott transzformációs paraméterek felhasználásával, a forrás rendszerbeli közös pontokat a cél rendszerbe transzformálja. A célrendszerben adott és transzformált koordináták különbségeként számítja az e_x, e_y, e_z maradék ellentmondások három összetevőjét, továbbá ezek felhasználásával térbeli Pitagorasz tétellel az e maradék ellentmondás vektort, amely a transzformált pont és az eredeti ponthely térbeli távolsága. A két rendszer illeszkedésének jellemzésére a program kiszámítja az m_0 súlyegység középhibáját az

$$m_0 = \sqrt{\frac{\sum(e_x^2 + e_y^2 + e_z^2)}{3n-7}} \quad (42)$$

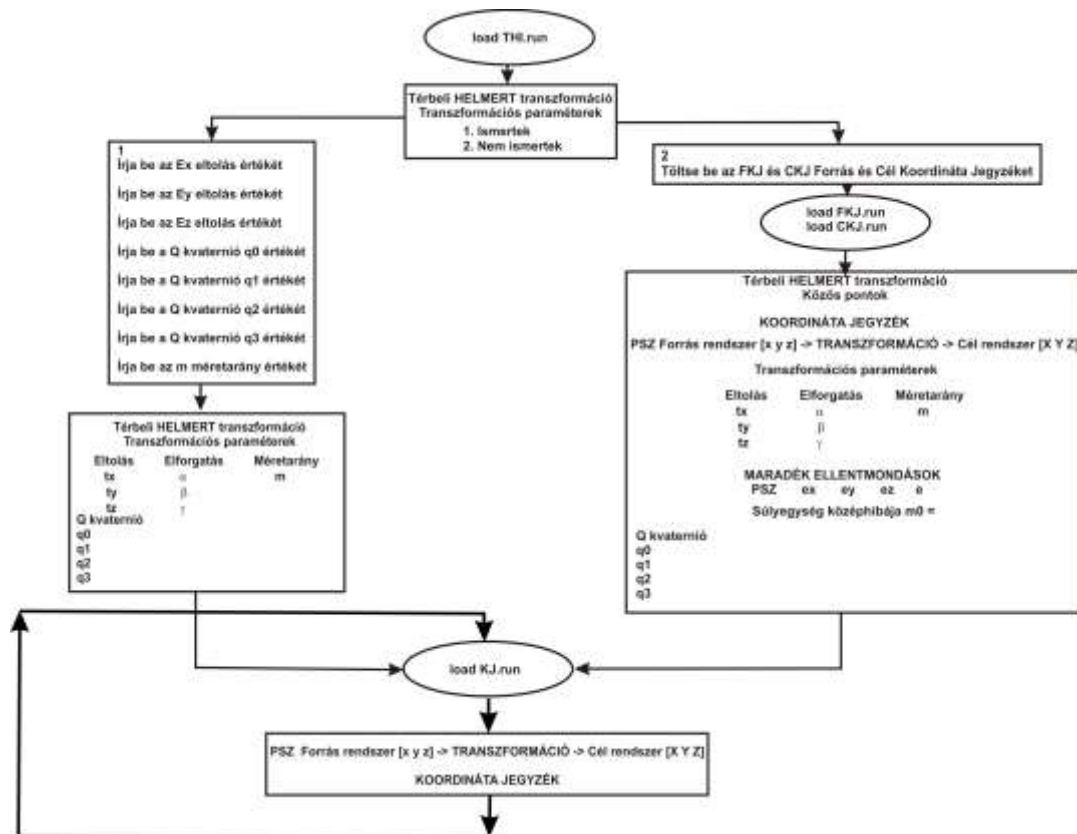
összefüggés alapján, ahol n a mindkét rendszerben adott közös pontok számát jelöli.

4.3 Térbeli Helmert transzformáció. Az átszámítandó pontokat tartalmazó KJ koordináta jegyzék fájl beolvasása után a program a forrás rendszerben adott pontok $[x \ y \ z]$ koordinátáit az $[X \ Y \ Z]$ célrendszerbe transzformálja. A transzformáció lépései a következő folyamatábrán láthatók 1. ábra.

Abból a célból, hogy bemutassuk a (35) (22) (23) és (24) összefüggések érvényességét megismételtük Grafarend – Avange (2003), Shan – Chan – Zheng (2006) és Zeng – Yi (2011) számításait. Az eredmények teljes egyezést mutatnak úgy a transzformációs paraméterek mind pedig, a transzformált koordináták és maradék ellentmondások tekintetében (1. Melléklet). Elvégeztük az OGPSH 24, 43 és 1151 pontjának továbbá a 36 pontos GNSS permanens állomások felhasználásával a transzformációs paraméterek meghatározását, a *bemérés* (WGS84 XYZ \rightarrow IUGG67 XYZ) és *kitűzés* (IUGG67 XYZ \rightarrow WGS84 XYZ) feladatok esetén (3. melléklet). A Zeng –Yi tesztfeladatainak szimulált koordinátákkal történő számítási eredményei kis forgásszögek (B \rightarrow A1), nagy forgásszögek (B \rightarrow A2) és szupernagy forgásszögek esetén (B \rightarrow A3) a 4. mellékletben található. A program futtatási adatai az 5. táblázatban láthatók.

5 Összefoglalás

A dátumtranszformáció az egyik leggyakrabban előforduló számítási feladat a geodéziában, forogrammetriában, térinformatikában, animációban és a számítógépes megjelenítésben. A hagyományos módszer hátránya, hogy a forgásszögek meghatározása erősen függ a paraméterek kezdeti értékeitől, amely szuper nagy forgásszögek esetén nem ad megoldást. A dolgozatban ismertetett módszer egység kvaterniót alkalmaz a térbeli forgatási mátrix meghatározásához. Ismerteti a kvaternó alapú geodéziai dátumtranszformáció iterációs megoldását linearizálással a Bursa-Wolf dátum transzformációs modellben. A számítások azt mutatják, hogy a kvaternó alapú iterációs megoldás független a paraméterek kezdeti értékeitől, gyors és megbízható



1. ábra. Térbeli Helmert transzformáció folyamatábrája

eredményt ad. Ennek az algoritmusnak a legnagyobb előnye, hogy tetszőleges nagyságú szögelfordulások esetében is alkalmazható a transzformációs paraméterek számításához.

Köszönetnyilvánítás. Őszinte és hálás köszönetet mondok a FÖMI munkatársai közül Kenyeres Ambrusnak a GNSS permanens állomások EOVS és ETRS89 koordinátáiért, valamint Virág Gábornak a GNSS permanens állomások HD72 koordinátáiért, Kádár István és Tóth Gyula tisztelt kollégáknak, továbbá a J Forums Programming tagjai közül Henry Rich, Mike Day és Raul Miller uraknak a feladat megoldásához és a program elkészítéséhez nyújtott önzetlen segítségükért.

Irodalom

1. A. Kleusberg, P.J.G. Teunissen (Eds.) (1996): GPS for Geodesy, Lecture Notes in Earth Sciences 60, Springer Verlag Berlin Heidelberg
2. A. Leick (2004): GPS satellite surveying, 3rd edn. Wiley, Hoboken
3. B. H. Wellenhoff, H. Lichtenegger and J. Collins (2001): GPS Theory and Practice, Fifth revised Ed. Springer-Verlag Wien New York
4. B Hofmann Wellenhoff, Kienast G, Lichtenegger H (1994): GPS in der Praxis, Springer-Verlag, Wien, New York
5. Detrekői Á. (1991): Kiegészítő számítások Tankönyvkiadó Budapest

6. Bertold K. P. Horn(1987): Closed-form solution of absolut orientation using unit quaternions, J. Opt. Soc. Am. A/Vol. 4, No. 4/April pp. 629-642
7. Grafarend EW, Awange LJ (2003): Nonlinear analysis of the threedimensional datum transformation [conformal group C7(3)]. J Geod 77:66–76
8. HamiltonWR (1853): Lectures on quaternions: containing a systematic statement of a New mathematical method, Hodges and Smith, Dublin
9. H. Zeng – Q. Yi (2011): Quaternion-Based Iterative Solution of Three-Dimensional Coordinate Transformation Problem, J of Computers Vol.6. No. 7. July, 1361-1368
10. J L. Awange, E. W Grafarend(2005): Solving Algebraic Computational Problems in Geodesy and Geoinformatics The answer to modern Challenges, Springer Berlin Heidelberg New York
11. Papp et al. (1997): GPS network transformation into different datums and projection systems. Reports on Geodes, No.4(27), 265-280.
12. Papp at al. (2002): Hungarian GPS Network Transformation into Different Datums and Projection Systems. Per. Pol. Civ. Eng. (46/2), 199-204
13. Papp E - Szűcs L (2005): Földi és műholdas hálózatok transzformációja Geomatikai Közlemények VIII. 85-92
14. Papp E (2013): Geodéziai dátumtranszformáció kvaternióval. Geomatikai Közlemények XVI. 17-28
15. Papp E (2013): Geodéziai dátumtranszformáció kvaternióval. <http://www.geo.info.hu/gisopen/2013/eloadasok/ppt/SZ21.pdf>
16. Vaníček P, Steeves RR (1996): Transformation of coordinates between two horizontal geodetic datums. J Geod 70:740–745
17. Vaníček P, Novák P, Craymer MR, Pagiatakis S (2002): On the correct determination of transformation parameters of a horizontal geodetic datum. Geomatica 56(4):329–340
18. WelschWM(1993): A general 7-parameter transformation for the combination, comparison and accuracy control of the terrestrial and satellite network observations. Manuscr Geod 17:210–214
19. Yang Y (1999): Robust estimation of geodetic datum transformation. J Geod 73:268–274
20. Y.-Z. Shen · Y. Chen · D.-H. Zheng (2006): A quaternion-based geodetic datum transformation algorithm J Geod 80: 233–239

A szerző elérési adatai

Papp Erik
Szent István Egyetem
Ybl Miklós Építéstudományi Kar
1146 Budapest
Thököly út 74
Tel. +36 1 252-1270
Email: papp.erik@ybl.szie.hu

1. Melléklet

```

load'H:\THIG.run'

p''

Térbeli HELMERT transzformáció

Transzformációs paraméterek

1 Ismertek
2 Nem ismertek
Transzformációs paraméterek: 1 Ismertek 2 Nem ismertek
2
Töltse be az FKJ és CKJ Forrás és Cél Koordináta Jegyzéket
=====

load'H:\FKJGB.run'
load'H:\CKJGA.run'

FKJ tp CKJ

=====

Térbeli HELMERT transzformáció
Közös pontok
PSZ Forrás rendszer [x y z] -> TRANSZFORMÁCIÓ -> Cél rendszer [X Y Z]
=====

KOORDINÁTA JEGYZÉK
Solitude 4157222.543 664789.307 4774952.099 4157870.237 664818.678 4775416.524
Bouch Zeil 4149043.336 688836.443 4778632.188 4149691.049 688865.785 4779096.588
Hohenneuffen 4172803.511 690340.078 4758129.701 4173451.354 690369.375 4758594.075
Kuehlenberg 4177148.376 642997.635 4760764.800 4177796.064 643026.700 4761228.899
Ex Mergelaec 4137012.190 671808.029 4791128.215 4137659.549 671837.337 4791592.531
Ex Hof Asperg 4146292.729 666952.887 4783859.856 4146940.228 666982.151 4784324.099
Ex Kaisersbach 4138759.902 702670.738 4785552.196 4139407.506 702700.227 4786016.645
n = 7 közös pont

=====

Transzformációs paraméterek
Eltolás Elforgatás Méretarány
641.88042526179925 0 0 -0.998497667920 1.0000055825198619
68.65534526761621 0 0 -0.893695765060
416.39818473067135 0 0 0.993087724442

=====

MARADÉK ELLENTMONDÁSOK [mm]
PSZ ex ey ez e
Solitude 94 135 140 216
Bouch Zeil 59 50 14 78
Hohenneuffen -40 -88 8 97
Kuehlenberg 20 22 87 92
Ex Mergelaec -92 14 5 93
Ex Hof Asperg -12 7 55 56
Ex Kaisersbach -29 4 2 30

=====

Súlyegység középhibája: m0 = 0.077233660919533681

=====

Q kvaternió
q0 = 0.999999999999183
q1 = 0.00000242043186
q2 = -0.00000216637384
q3 = -0.00000240731782

=====

load'H:\KJG.run'

TH KJ

```

```
=====
PSZ                Forrás rendszer [x y z] -> TRANSZFORMÁCIÓ -> Cél rendszer [X Y Z]
=====
```

```
=====
                                KOORDINÁTA JEGYZÉK
Solitude            4157222.543  664789.307  4774952.099  4157870.143  664818.543  4775416.384
Bouch Zeil          4149043.336  688836.443  4778632.188  4149690.990  688865.835  4779096.574
Hohenneuffen        4172803.511  690340.078  4758129.701  4173451.394  690369.463  4758594.083
Kuehlenberg         4177148.376  642997.635  4760764.800  4177796.044  643026.722  4761228.986
Ex Mergelaec        4137012.190  671808.029  4791128.215  4137659.641  671837.323  4791592.536
Ex Hof Asperg       4146292.729  666952.887  4783859.856  4146940.240  666982.144  4784324.154
Ex Kaisersbach      4138759.902  702670.738  4785552.196  4139407.535  702700.223  4786016.643
=====
```

2. Melléklet THI program lista

```
=====
NB.=====
NB.Térbeli HELMERT transzformáció itarációs megoldása kvaternióval J nyelven (J602a)
NB.                Bursa-Wolf hasonlósági transzformáció
NB.                Grafarend példája 15 karakter hosszú pont nevekkal
NB.                Ismert transzformációs paraméterek: p''
NB.                Transzformációs paraméterek közös pontok alapján: FKJ tp CKJ
NB.                Új pontok transzformálása : TH KJ
NB.=====

pps=:9!:11  NB. set print precision
pps 20

vonala=: 0 : 0

=====
)

mp=: +/ . *  NB. Matrix product

dmstor=:3 :'1r180p1*1r60#.|.'1:y'
rtodms=:3 :',4j0 4j0 17j12":,'2 s*0 60 60#:3600*1r180p1%~|y[s=.*y'

display =: (1!:2) & 2

p=: 3 : 0
display'                Térbeli HELMERT transzformáció'
display''
display'                Transzformációs paraméterek'
display''
display'                1 Ismertek'
display'                2 Nem ismertek'
display'Transzformációs paraméterek: 1 Ismertek 2 Nem ismertek'
W=:."w[w=: (1!:1)1
''
if. W=1 do.
display'Írja be az Ex eltolás értékét:'
tx=: (1!:1)1
display'Írja be az Ey eltolás értékét:'
ty=: (1!:1)1
display'Írja be az Ez eltolás értékét:'
tz=: (1!:1)1
display'Írja be a Q kvaternió q0 értékét:'
q0=: (1!:1)1
display'Írja be a Q kvaternió q1 értékét:'
q1=: (1!:1)1
display'Írja be a Q kvaternió q2 értékét:'
q2=: (1!:1)1
display'Írja be a Q kvaternió q3 értékét:'
q3=: (1!:1)1
display'Írja be az m méretarány értékét:'
la=: (1!:1)1
la=:."la[I=:3 3$1 0 0 0[t=:3 1$tx,ty,tz[tx=:."tx[ty=:."ty[tz=:."tz
q=:3 1$q1,q2,q3[q0=:."q0[q1=:."q1[q2=:."q2[q3=:."q3
Cq=:3 3$0,(-q3),q2,q3,0,(-q1),(-q2),q1,0[q=:3 1$q1,q2,q3  NB. R forgatási mátrix
R=:R1+R2[R2=:2*(q mp |:q)+(3 3$,q0)*Cq[R1=: I*3 3$,(*:q0)-(|:q) mp q
=====
```

```

Ez=: rtodms _3 o. 1{r % 0{r[Ey=: rtodms _1 o. -2{r[Ex=: rtodms _3 o. 5{r % 8{r[r=:,R
E=:Ex,Ey,:Ez NB. forgatások
c16=: ' Térbeli HELMERT transzformáció'
c22=: ' Transzformációs paraméterek'
c23=: ' Eltolás Elforgatás Méretarány'
c6=:d,e,:f[d=:21j16":,la[e=:',('U ) [f=:',('U ) [U=:''
c24=:,(30j14":t),.('E),.c6
UQ=:('Q kvaternió'),('q0 = ',18j14":q0),('q1 = ',18j14":q1),('q2 = ',18j14":q2),:('q3 = ',18j14":q3)
vonal,c16,c22,c23,c24,vonal,UQ,vonal
elseif. W=2 do.'Töltse be az FKJ és CKJ Forrás és Cél Koordináta Jegyzéket',vonal end.
)

tp=: 4 : 0 NB. Transzformációs paraméterek számítása közös pontok alapján
AS=:('AKJ)-"1 RA=(+/%#)".AKJ=:>,15)."1&.>,.CKJ[X=:5 1$1
BS=:('BKJ)-"1 RB=(+/%#)".BKJ=:>,15)."1&.>,.FKJ[dX=:5 1$0
label_iteracio. q=:3 1$q1,q2,q3[q0=:0{X[q1=:1{X[q2=:2{X[q3=:3{X[la=:4{X[X=:X+dX
i=:0[n=:0{SAKJ[B=:0 0$0[l=:0 0$0
while. i<n do.
dx=:0{bs[dy=:1{bs[dz=:2{bs[bs=:i{BS
B12=:2*la*(q2*dy)+q3*dz[B11=:2*la*(-q3*dx)+q2*dz
B14=:2*la*(-2*q3*dx)-q0*dy)+q1*dz[B13=:2*la*(-2*q2*dx)+q1*dy)+q0*dz
B22=:2*la*(q2*dx)-2*q1*dy)-q0*dz[B21=:2*la*(q3*dx)-q1*dz
B24=:2*la*(q0*dx)-2*q3*dy)+q2*dz[B23=:2*la*(q1*dx)+q3*dz
B32=:2*la*(q3*dx)+q0*dy)-2*q1*dz[B31=:2*la*(-q2*dx)+q1*dy
B34=:2*la*(q1*dx)+q2*dy[B33=:2*la*(-q0*dx)+q3*dy)-2*q2*dz
K1=:((1-2*(q2)+(q3))*dx)+(2*dy*(q1*q2)-(q0*q3))+2*dz*(q0*q2)+(q1*q3)
K2=:2*dx*(q0*q3)+(q1*q2)+(1-2*(q1)+(q3))*dy)+2*dz*(q2*q3)-(q0*q1)
K3=:2*dx*(q1*q3)-(q0*q2)+(2*dy*(q0*q1)+(q2*q3)+(1-2*(q1)+(q2))*dz
B=:B,3 5$B11,B12,B13,B14,K1,B21,B22,B23,B24,K2,B31,B32,B33,B34,K3
DX=:0{as[DY=:1{as[DZ=:2{as[as=:i{AS
l=:1,3 1$l1x,l1y,l1z[lz=:DZ-la*K3[l1y=:DY-la*K2[l1x=:DX-la*K1
i=:i+1
end.
CT=:|:C[C=:1 5$q0,q1,q2,q3,0[W=: BT mp l[I =: =i.#NbI[NbI=:%.Nb[Nb=:BT mp B[BT=:|:B
NcI=:%.Nc[Nc=:C mp NbI mp CT[Wx=: (1+/*:Q)%2[Q=:4 1$q0,q1,q2,q3
dX=:NbI mp((I -A mp NbI)mp W)+CT * 0{NcI mp Wx[A=:CT mp C * 0{NcI
tol=:5 1$1.0e_9
if. (|dX) < tol do. goto_eltolas. end.
if. (|dX) > tol do. goto_iteracio. end.
label_eltolas.
m=:3 3$la,0,0,0[I=:3 3$1 0 0 0
Cq=:3 3$0,(-q3),q2,q3,0,(-q1),(-q2),q1,0[q=:3 1$q1,q2,q3 NB. R forgatási mátrix
R=:R1+R2[R2=:2*(q mp |:q)+(3 3$0)*Cq[R1=: I*3 3$,(*:q0)-(|:q) mp q
Ez=: rtodms _3 o. 1{r % 0{r[Ey=: rtodms _1 o. -2{r[Ex=: rtodms _3 o. 5{r % 8{r[r=:,R
E=:Ex,Ey,:Ez NB. forgatások
la=:4{X [i=:0[n=:0{SAKJ[TKJ=:0 3$0[P=:>,.15{. "1&.>,.FKJ NB. méretarány
t=:3 1$1{"1 RA- (3 3$,la)*R mp RB NB. t eltolás
while. i<n do.
TKJ =:TKJ,RA + m mp R mp bs[bs=:i{ BS
i=:i+1
end.
Tav=:+/%.*/
NB. térbeli Pitagórasz
T=:1e3*Tav"1 me[me=:('AKJ) - TKJ NB. e maradék ellentmondások
m0=:%:(+/*:T%1e3) % (3*n)-7 NB. mo súlyegység középhibája
c16=: ' Térbeli HELMERT transzformáció'
c17=: ' Közös pontok'
c18=: ' PSZ Forrás rendszer [x y z] -> TRANSZFORMÁCIÓ -> Cél rendszer [X Y Z]'
c20=: ' KOORDINÁTA JEGYZÉK'
PO=:P[KJA=:12j3":('AKJ)[KJB=:12j3":('BKJ)[P=:>,15{. "1&.>,.FKJ
c19=:('PO),.('KJB),.('KJA)
c21=: ' n = ',('n),' közös pont'
c22=: ' Transzformációs paraméterek'
c23=: ' Eltolás Elforgatás Méretarány'
c6=:d,e,:f[d=:21j16":,la[e=:',('U ) [f=:',('U ) [U=:''
c24=:,(30j14":t),.('E),.c6
c27=: ' MARADÉK ELLENTMONDÁSOK [mm]'
c28=: ' PSZ ex ey ez e'
c29=:('PO),.(16j0":1e3*me),.(16j0":.T)
c25=: ' Súlyegység középhibája: m0 = ',m0
UQ=:('Q kvaternió'),('q0 = ',18j14":q0),('q1 = ',18j14":q1),('q2 = ',18j14":q2),:('q3 = ',18j14":q3)

```

vonal,c16,c17,c18,vonal,c20,c19,c21,vonal,c22,c23,c24,vonal,c27,c28,c29,vonal,c25,vonal,
UQ,vonal
)

```

TH=:3 : 0 NB. Térbeli HELMERT transzformáció: Új pontok transzformálása
i=:0[n=:0{$KJ[KJT=:0 3$0[P=:>,15{."1&.>,KJ[AKJ=:>,15}."1&.>,.KJ
m=:3 3$a,0,0,0
while. i<n do.
  KJT=:KJT,(,t) + m mp R mp kj[kj=:i{("AKJ)
  i=:i+1
end.
PO=:P[KJ1=:12j3":.">,15}."1&.>,.KJ[KJ2=:12j3":KJT
c13=: ' PSZ Forrás rendszer [x y z] -> TRANSZFORMÁCIÓ -> Cél rendszer [X Y Z]'
c14=: ' KOORDINÁTA JEGYZÉK'
c15=: ("PO),.("KJ1),.("KJ2)
vonal,c13,vonal,c14,c15,vonal
)

```

3. Melléklet Transzformációs paraméterek az OGPSH hálózatban

24 OGPSH pont

Bemérés

Eltolás	Elforgatás	Méretarány
47.74933355068788	0 0 -0.306123213089	0.9999978420534464
-69.28009660798125	0 0 -0.065932597122	
10.99731061328203	0 0 -0.470624405449	

Súlyegység középhibája: m0 = 0.32418473225812611

Q kvaternió

1.0000000000084597
7.4206342672792757e_7
-1.5982597214247128e_7
1.1408256335389682e_6

Kitűzés

Eltolás	Elforgatás	Méretarány
47.74935320112854	0 0 0.306125542704	1.0000021579310256
-69.28051680489443	0 0 -0.065929942692	
-10.99732533283532	0 0 -0.470620253133	

Súlyegység középhibája: m0 = 0.32418543185011989

Q kvaternió

1.0000000000028832
7.420694385260523e_7
1.598178444942707e_7
-1.1408158052317323e_6

36 GNSS permanens állomás

Bemérés

Eltolás	Elforgatás	Méretarány
51.96643497003242	0 0 -0.331785442204	0.9999988139153917
-71.39042463316582	0 0 -0.114897321290	
14.78340903297067	0 0 -0.397012457742	

Súlyegység középhibája: m0 = 0.12097859778839842

Q kvaternió

1.0000000007559906
8.042708765183976e_7
2.7851819219222469e_7
9.6238558015356886e_7

Kitűzés

Transzformációs paraméterek

Eltolás	Elforgatás	Méretarány
51.96470452938229	0 0 0.331918304533	1.0000011806202826
_71.38893020967953	0 0 0.114397846915	
_14.76109108235687	0 0 0.397073912375	

Súlyegység középhibája: m0 = 0.12097873536740955

Q kvaternió

1.0000000007554279
 _8.0459240893167132e_7
 _2.7730898060839141e_7
 _9.6253410326257538e_7

43 OGPSH pont

Bemérés

Transzformációs paraméterek

Eltolás	Elforgatás	Méretarány
_47.09508530888706	0 0 _0.263031423410	0.9999979020935977
67.88758528418839	0 0 0.096979283117	
10.49353692680597	0 0 _0.488204349211	

Súlyegység középhibája: m0 = 0.37292550986285794

Q kvaternió

1.000000000161495
 6.3760588495626314e_7
 _2.3508517076049823e_7
 1.1834405885019062e_6

Kitűzés

Transzformációs paraméterek

Eltolás	Elforgatás	Méretarány
47.09497904544696	0 0 0.263031877562	1.0000020978234070
_67.88777068816125	0 0 _0.096984020876	
_10.49331891443580	0 0 0.488207751280	

Súlyegység középhibája: m0 = 0.37292629218370243

Q kvaternió

1.000000000161102
 _6.3760754228436853e_7
 2.3509514626974617e_7
 _1.1834491351408273e_6

1151 OGPSH pont

Bemérés

Transzformációs paraméterek

Eltolás	Elforgatás	Méretarány
_53.41677052946761	0 0 _0.142687542710	0.9999979573950024
64.83007477363572	0 0 _0.176147624255	
16.46131046582013	0 0 _0.500099162842	

Súlyegység középhibája: m0 = 0.25089733292931155

Q kvaternió

0.99999999999911493
 3.4588488178171987e_7
 4.2699347136121136e_7
 1.2122747279752629e_6

Kitűzés

Transzformációs paraméterek

Eltolás	Elforgatás	Méretarány
53.41677542310208	0 0 0.142687970732	1.0000020425996745
_64.83033450064249	0 0 0.176147278043	
_16.46120944619179	0 0 0.500099281061	

Súlyegység középhibája: m0 = 0.25089784540894433

Q kvaternió
0.99999999999911515
_3.4588488407018902e_7
_4.2699347073473769e_7
_1.2122747191661935e_6

4. Melléklet Tesztfeladatok szimulált koordinátákkal

B→A1 kis forgásszögek

Eltolás	Transzformációs paraméterek		
	Elforgatás	Méretarány	
29.99823028266335	0 47 31.252012352985	1.0000227366253285	
30.00046987693159	0 31 14.217921271189		
10.00006743257287	0 55 43.247783217219		

Súlyegység középhibája: m0 = 0.0018259779959799709

Q kvaternió
0.99993321081939501
_0.0068744584569319549
_0.0045989711280451807
_0.0080724956512826501

B→A2 nagy forgásszögek

Eltolás	Transzformációs paraméterek		
	Elforgatás	Méretarány	
30.00016823367852	33 12 48.492700493240	1.0000199563410337	
29.99992344722332	6 8 46.053501577288		
9.99954877705121	30 55 48.205836123700		

Súlyegység középhibája: m0 = 0.00026419635541306141

Q kvaternió
0.92634995571618584
0.26135833670539343
0.12561249996497431
0.24039359232675253

B→A3 szupernagy forgásszögek

Eltolás	Transzformációs paraméterek		
	Elforgatás	Méretarány	
30.00013025653966	83 21 12.807039002248	1.0000122196695893	
29.99996363904662	_54 _12 _9.233917704114		
10.00005582802216	84 2 6.798470068257		

Súlyegység középhibája: m0 = 0.0003189606494462068

Q kvaternió
_0.29121896346375653
0.66752016745323162
0.14341112073731474
0.67010565719981574

5. Melléklet Program futtatása

Térbeli Helmert Iterációs program futtatása						
Közös pontok száma	7	9	24	36	43	1151
	Grafarend	Zeng-Yi	OGPSH	GNSS	OGPSH	OGPSH
Program futási ideje [sec]	1	1	1	1	1	4
Eredmények listája						
A4-es lapbéret 8-as betűméret	2	2	2	2	2	31