GEODÉZIAI DÁTUMTRANSZFORMÁCIÓ KVATERNIÓVAL

Papp Erik
Szent István Egyetem Ybl Miklós Építéstudományi Kar

ÖSSZEFOGLALÁS

A dátumtranszformáció a geodéziában alkalmazott olyan számítási módszer, melynek számos különböző algoritmuson alapuló változata ismert. A megoldások többsége kis szögelfordulásokat feltételez és linearizálás szükséges a transzformációs paraméterek meghatározásához. A dolgozat kvaternió alapú dátum transzformációs analitikus megoldást ismertet. Bemutatja a kvaternió számításához szükséges összefüggéseket, a kvaterniók alkalmazását forgatás, az eltolás és méretarány paraméterek meghatározását a Bursa-Wolf dátum transzformációs modellben. Ennek az algoritmusnak a legnagyobb előnye, hogy tetszőleges nagyságú szögelfordulások esetében is alkalmazható, nincs szükség linearizálásra és iterációra a transzformációs paraméterek számításához.

1 Bevezetés

A GPS-szel történő szabatos helymeghatározáskor a koordináták WGS84 rendszerben adottak, amelyeket gyakran át kell transzformálni egy helyi geodéziai koordináta rendszerbe. Kitűzéskor helyi rendszerbeli koordinátákat transzformálunk WGS84 rendszerbe. Mozgó platform térbeli helyzetének meghatározása három vagy több GPS antenna koordinátáiból történik WGS84 rendszerben vagy a platform koordináta rendszerében. Dátumtranszformáció esetén hét transzformációs paramétert kell kiszámítanunk, nevezetesen három eltolást, három elforgatást és a méretarány paramétert. A méretarány csak a koordináták közötti transzformációval van kapcsolatban és nem a koordináta rendszerek közötti transzformációval, lásd Vanicek et al. (2002) ezért ők egy alternatív megoldást javasoltak, méretarány paraméter nélkül, amelyet mi is alkalmazunk az itt bemutatott kvaternió algebra felhasználásán alapuló dátumtranszformációhoz. A forgatási paramétereket általában három forgásszöggel szokás megadni. A forgatási mátrixban kilenc ismeretlen szerepel, amelyekre hat ortogonalitási és normalizálási feltétel teljesül.

Számos külföldi és hazai publikáció foglakozik a geodéziai dátumtranszformációval, mint például Welsch (1993), Grafarend et al. (1995), Vanicek and Steeves (1996), Yung (1999), Papp at al. (1997), (2002), (2005) és linearizálás szükséges a transzformációs paraméterek meghatározásához azért, hogy egyszerűsítsük a modellt. Grafarend és Awange (2003) Gauss-Jacobi kombinatorikai és procrustes algoritmust javasolt 3D dátumtranszformációs feladat megoldásához, ez az algoritmus linearizáció mentes.

Hamilton 170 éve, 1843-ban fedezte fel a kvaterniókat egy 3D vektor ábrázolására. A kvaternió nagyon alkalmas a forgatás egységsugarú gömbön történő leírására. Ezért széleskörben alkalmazzák mozgó objektum helyzetének leírására, mint például űrhajó, repülőgép vagy gépjármű továbbá a robotok irányításában az animációban, fizikában és mechanikában.

Ebben a dolgozatban megvizsgáljuk a dátumtranszformáció megoldását a kvaternió algebra jelölésével illetve alkalmazásával és bemutatjuk a kvaternió alapú dátum transzformációs algoritmust.

2 A kvaternió algebráról röviden

A Q kvaternió komplex számként a következőképpen definiálható

$$Q = q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k} = q_0 + \boldsymbol{q} \tag{1}$$

ahol $\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = -1, \boldsymbol{ij} = -\boldsymbol{ji} = \boldsymbol{k}, \boldsymbol{jk} = -\boldsymbol{kj} = \boldsymbol{i}, \boldsymbol{ki} = -\boldsymbol{ik} = \boldsymbol{j}$

és a képzetes rész $\boldsymbol{q} = q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}$ egy 3D vektort jelöl.
A megfelelő konjugált kvaternió az alábbiak szerint jelölhető

$$Q^* = q_0 - q_1\boldsymbol{i} - q_2\boldsymbol{j} - q_3\boldsymbol{k} = q_0 - \boldsymbol{q} \tag{2}$$

A ***Q*** kvaternió oszlopvektor formában is kifejezhető az (1 ***i j k***) egységvektorok felhasználásával

$$\boldsymbol{Q} = (q_0\ q_1\ q_2\ q_3)^T = \left(q_0\ \boldsymbol{q}^T\right)^T \tag{3}$$

ahol $\boldsymbol{q} = (q_1 q_2 q_3)^T$ egy 3D vektort és T a transzponálást jelöli. Egy 3D ***p*** vektor mindig megadható kvaterniókkal a következők szerint

$$\boldsymbol{p} = 0 + p_1\boldsymbol{i} + p_2\boldsymbol{j} + p_3\boldsymbol{k} = 0 + \boldsymbol{p} \tag{4}$$

A kvaternió hossza

$$\|Q\| = \sqrt{q_0{}^2 + q_1{}^2 + q_2{}^2 + q_3{}^2} \tag{5}$$

Ha $\|Q\| = 1$, akkor a Q kvaterniót egység kvaterniónak nevezzük.

A Q kvaternió definíciójának megfelelően könnyen igazolhatók az alábbi tulajdonságok

$$\lambda(P + Q) = \lambda P + \lambda Q \tag{6}$$

$$PQ = p_0 q_0 + p_0\boldsymbol{q} + q_0\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q} + \boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q} \tag{7}$$

$$C(P + Q) = CP + CQ \tag{8}$$

$$CPQ = (CP)Q = C(PQ) \tag{9}$$

$$(PQ)^* = Q^* P^* \tag{10}$$

$$QQ^* = \|Q\| \tag{11}$$

$$Q^{-1} = \frac{Q^*}{\|Q\|} \tag{12}$$

ahol λ egy valós szám, C , P és Q kvaterniók, a Q^{-1} a Q kvaternió inverzét jelöli, a . és $\times$ a skaláris és a vektoriális szorzat jele. Vektorok skaláris és vektoriális szorzata a következőképpen definiálható

$$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}=\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{q}, \qquad \boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q}=\boldsymbol{C}(\boldsymbol{p})\boldsymbol{q} \tag{13}$$

A kvaternió szorzat $C=PQ$ (7) egyenlet oszlopvektor és mátrix szorzataként kifejezhető

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} c_0 \\ \boldsymbol{c} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} p_0 & -\boldsymbol{p}^T \\ \boldsymbol{p} & p_0\boldsymbol{I}+\boldsymbol{C}(\boldsymbol{p}) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_0 \\ \boldsymbol{q} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} q_0 & -\boldsymbol{q}^T \\ \boldsymbol{q} & q_0\boldsymbol{I}-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q}) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_0 \\ \boldsymbol{p} \end{bmatrix} \tag{14}$$

ahol $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{p})=\begin{bmatrix} 0 & -p_3 & p_2 \\ p_3 & 0 & -p_1 \\ -p_2 & p_1 & 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q})=\begin{bmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

I egy 3×3 egységmátrix. Bevezetve a következő mátrix jelöléseket

$$\boldsymbol{P}^+=\begin{bmatrix} p_0 & -\boldsymbol{p}^T \\ \boldsymbol{p} & p_0\boldsymbol{I}+\boldsymbol{C}(\boldsymbol{p}) \end{bmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{Q}^-=\begin{bmatrix} q_0 & -\boldsymbol{q}^T \\ \boldsymbol{q} & q_0\boldsymbol{I}-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q}) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_0 \\ \boldsymbol{p} \end{bmatrix} \tag{15}$$

ahol a + és – felsőindex a *C(.)* mátrix előjelét jelöli és behelyettesítve a (15) egyenletet a (14) egyenletbe, eredményül a szorzat kvaternió vektor és mátrix formáját kapjuk:

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^+\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^-\boldsymbol{P} \tag{16}$$

Egyszerűen bizonyítható, hogy a konjugált kvaternió a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

$$\left(\boldsymbol{P}^*\right)^+=\left(\boldsymbol{P}^+\right)^T \quad , \quad \left(\boldsymbol{P}^*\right)^-=\left(\boldsymbol{P}^-\right)^T \tag{17}$$

Jól ismert módszer egy 3D ***p*** vektor ***s*** vektorba történő forgatására kvaternióval a következő:

$$S=QPQ^* \tag{18}$$

ahol a ***p*** és ***s*** vektorokból képzett kvaterniók a *P* és *S*, *Q* pedig egység kvaternió, amely az alábbiak szerint definiálható

$$Q=cos\frac{\theta}{2}+\boldsymbol{e}_n\,sin\frac{\theta}{2} \tag{19}$$

ahol $\boldsymbol{e}_n=e_1\boldsymbol{i}+e_2\boldsymbol{j}+e_3\boldsymbol{k}$ és $e_1^2+e_2^2+e_3^2=1$, amely egy 3D egység vektor, θ a forgásszög az $\boldsymbol{e}_n$ egységvektor körül és az $\boldsymbol{e}_n\cdot\boldsymbol{e}_n=-1$. Összehasonlítva a (19) egyenletet az (1) egyenlettel, nyilvánvaló, hogy

$$q_0=cos\frac{\theta}{2} \quad , \quad q_1=e_1\,sin\frac{\theta}{2} \quad , \quad q_2=e_2 sin\frac{\theta}{2} \quad , \quad q_3=e_3\,sin\frac{\theta}{2}$$

A (16) és (17) egyenletek alapján a (18) egyenlet kifejezhető vektor-mátrix formában

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{Q}^{+}\boldsymbol{P}^{+}\boldsymbol{Q}^{*} \tag{20}$$

3 Dátumtranszformációs modell kvaternióval

Legtöbb dátumtranszformációs modell hétparaméteres, amelyek két különböző geodéziai dátumhoz tartozó közös pontok felhasználásával kerülnek kiszámításra. A jól ismert *Bursa-Wolf hasonlósági transzformációs modell*, amelyet *klasszikus modellnek, hétparaméteres modellnek,* vagy *térbeli Helmert modellnek* is neveznek a következők szerint írható fel:

$$\boldsymbol{s}_i = \boldsymbol{t} + k\boldsymbol{R}\boldsymbol{p}_i \tag{21}$$

ahol $\boldsymbol{s}_i$, $\boldsymbol{p}_i$ (i=1,…n) a két különböző rendszerben adott közös pontok 3D koordinátái, $\boldsymbol{t} = (t_X t_Y t_Z)^T$ jelöli a három eltolás paramétert, k a méretarány tényező (ebben a hétparaméteres modellben) és a 3×3-as $\boldsymbol{R}$ forgatási mátrix három forgatási paramétert tartalmaz. Nyilvánvaló, hogy hét paraméter meghatározásához a közös pontok számának $\boldsymbol{s}_i$, $\boldsymbol{p}_i$ (i=1,…,n), nagyobbnak vagy egyenlőnek kell lennie, mint három.

Határozzuk meg a súlypontra vonatkozó $\Delta\boldsymbol{s}_i, \Delta\boldsymbol{p}_i$ koordinátákat:

$$\Delta\boldsymbol{s}_i = \boldsymbol{s}_i - \bar{\boldsymbol{s}} \quad , \quad \Delta\boldsymbol{p}_i = \boldsymbol{p}_i - \bar{\boldsymbol{p}} \tag{22}$$

ahol $\bar{\boldsymbol{s}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{s}_i$, $\boldsymbol{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{p}_i$. Behelyettesítve a (22) egyenletet a (21) egyenletbe a következőt kapjuk

$$\Delta\boldsymbol{s}_i = \Delta\boldsymbol{t} + k\boldsymbol{R}\Delta\boldsymbol{p}_i \tag{23}$$

és

$$\Delta\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t} + k\boldsymbol{R}\bar{\boldsymbol{p}} - \bar{\boldsymbol{s}} \tag{24}$$

A (23) egyenlet általában túlhatározott. Jelölje a maradékvektort $\boldsymbol{v}_i$

$$\boldsymbol{v}_i = \Delta\boldsymbol{s}_i - \Delta\boldsymbol{t} - k\boldsymbol{R}\Delta\boldsymbol{p}_i \tag{25}$$

Ezek után a transzformációs paraméterek a következő optimalizálási feladat megoldásával határozhatók meg

$$\min_{k,\Delta\boldsymbol{t},\boldsymbol{R}} \sum \boldsymbol{v}_i^T \boldsymbol{v}_i = \min_{k,\Delta\boldsymbol{t},\boldsymbol{R}} \left[n\Delta\boldsymbol{t}^T\Delta\boldsymbol{t} + \sum_{i=1}^{n} \left(\Delta\boldsymbol{s}_i - k\boldsymbol{R}\Delta\boldsymbol{p}_i\right)^T \left(\Delta\boldsymbol{s}_i - k\boldsymbol{R}\Delta\boldsymbol{p}_i\right) \right] \tag{26}$$

Mivel a (26) egyenlet jobb oldalán lévő $\Delta\boldsymbol{t}$ első tag független a másodiktól, ezért $\Delta\boldsymbol{t} = 0$, vagy ami ezzel egyenlő

$$\boldsymbol{t} = \bar{\boldsymbol{s}} - k\boldsymbol{R}\bar{\boldsymbol{p}} \tag{27}$$

Ebből következően csak egy rész-optimalizálási feladatot kell megoldanunk, nevezetesen

$$\min_{k,\Delta\boldsymbol{t},\boldsymbol{R}} \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\Delta\boldsymbol{s}_i - k\boldsymbol{R}\Delta\boldsymbol{p}_i\right)^T \left(\Delta\boldsymbol{s}_i - k\boldsymbol{R}\Delta\boldsymbol{p}_i\right) \right] \tag{28}$$

Mivel $\boldsymbol{R}$ ortogonális mátrix, a (28) egyenlet a következő alakban is felírható

$$\min_{k,\Delta\boldsymbol{t},\boldsymbol{R}} \left[\sum_{i=1}^{n} \Delta\boldsymbol{s}_i^T \Delta\boldsymbol{s}_i - 2k\sum_{i=1}^{n} \Delta\boldsymbol{s}_i^T \boldsymbol{R}\Delta\boldsymbol{p}_i + k^2\sum_{i=1}^{n} \Delta\boldsymbol{p}_i^T \Delta\boldsymbol{p}_i \right] \tag{29}$$

A (29) egyenlet *k* szerinti parciális differenciálhányadosát véve meghatározhatjuk a méretarány paramétert, amelyre az alábbi összefüggést kapjuk

$$k = \sum_{i=1}^{n} \Delta\boldsymbol{s}_i^T \boldsymbol{R} \Delta\boldsymbol{p}_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} \Delta\boldsymbol{p}_i^T \Delta\boldsymbol{p}_i \tag{30}$$

Behelyettesítve a (30) egyenletet a (29) egyenletbe a következő problémához jutunk

$$\min_{\boldsymbol{R}} \left[\sum_{i=1}^{n} \Delta\boldsymbol{s}_i^T \Delta\boldsymbol{s}_i - \left(\sum_{i=1}^{n} \Delta\boldsymbol{s}_i^T \boldsymbol{R} \Delta\boldsymbol{p}_i \right)^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n} \Delta\boldsymbol{p}_i^T \Delta\boldsymbol{p}_i \right] \tag{31}$$

Az egyetlen paraméter, amelyre meg kell oldanunk a (31) egyenletet az ***R*** forgatási mátrix, továbbá a (31) egyenletben szereplő minimumkeresési feladat így egyenértékű a (31) egyenlet második tagja maximumának a meghatározásával, nevezetesen

$$\max_{\boldsymbol{R}} \left[\sum_{i=1}^{n} \Delta\boldsymbol{s}_i^T \boldsymbol{R} \Delta\boldsymbol{p}_i \right] \tag{32}$$

Bevezetve az ***R*** forgatási mátrixot képviselő ***Q***, $\boldsymbol{S}_i$ és ***Pi*** vektor-kvterniókat, a (32) egyenlet megadható kvaterniókkal

$$\max_{\boldsymbol{Q}} \left[\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{S}_i^T \boldsymbol{Q}^+ \boldsymbol{P}_i^+ \boldsymbol{Q}^* \right] \tag{33}$$

ahol $\boldsymbol{S}_i = \left(0, \Delta\boldsymbol{s}_i^T\right)^T$, $\boldsymbol{P}_i = \left(0, \Delta\boldsymbol{p}_i^T\right)^T$ és $\boldsymbol{Q} = \left(q_0, \boldsymbol{q}^T\right)^T$

A (33) egyenletben szereplő $\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{S}_i^T \boldsymbol{Q}^+ \boldsymbol{P}_i^+ \boldsymbol{Q}^*$ kifejezés átrendezhető a (17) egyenlet alapján, lásd Shan 235. oldal (2006). A részletes levezetés nélkül a következő, számításra alkalmas összefüggést kapjuk:

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{S}_i^T \boldsymbol{Q}^+ \boldsymbol{P}_i^+ \boldsymbol{Q}^* = \boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{N} \boldsymbol{Q} \tag{34}$$

ahol ***N*** egy 4×4 mátrix

$$\underset{4x4}{\boldsymbol{N}} = \sum_{i=1}^{n} \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \begin{bmatrix} \Delta\boldsymbol{s}_i^T \boldsymbol{\Delta} p_i & \Delta\boldsymbol{s}_i^T \boldsymbol{C}(\Delta\boldsymbol{p}_i) \\ -\boldsymbol{C}(\Delta\boldsymbol{s}_i)\Delta\boldsymbol{p}_i & \Delta\boldsymbol{s}_i \Delta\boldsymbol{p}_i^T + \boldsymbol{C}(\Delta\boldsymbol{s}_i)\boldsymbol{C}(\Delta\boldsymbol{p}_i) \end{bmatrix} \tag{35}$$

Következésképpen a (33) egyenletben szereplő maximumkeresési feladat az alábbiak szerint írható

$$\max_{\boldsymbol{Q}} \left[\boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{N} \boldsymbol{Q} \right] \tag{36}$$

Más szavakkal, a (32) egyenletben szereplő maximumkeresési feladat egyenértékű a ***Q*** kvaternió meghatározásával, a (36) egyenlet maximumkeresési feladatával.

Mivel ***N*** egy valódi szimmetrikus mátrix, amely négy valós λ_i sajátértéket, és négy ezekhez tartozó megfelelő valós $\boldsymbol{e}_i$ sajátvektort tartalmaz

$$Ne_i = \lambda_i e_i \quad , \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{37}$$

ezért a (36) egyenletben szereplő maximum meghatározási feladat azonos az ***N*** mátrix sajátvektorához tartozó maximális sajátértékének a meghatározásával

$$Q = e_i \quad , \; és \quad \lambda_j = \max_i \{\lambda_i\} \tag{38}$$

A (20) egyenlet a következőképpen alakítható át

$$S = Q^{+}P^{+}Q^{*} = Q^{+}\left(Q^{*}\right)^{-}P = Q^{+}\left(Q^{-}\right)^{T}P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(q_0^2 - q^T q\right)I + 2\left(qq^T + q_0 C(q)\right) \end{bmatrix} P \tag{39}$$

Az ***R*** 3×3 forgatási mátrix

$$R = \left(q_0^2 - q^T q\right)I + 2\left(qq^T + q_0 C(q)\right) \tag{40}$$

ahol a ***q*** egy 3D vektort jelöl, ***I*** egy 3×3 egységmátrix ld. a (14) egyenletet.

Ezek után a forgásszögek, az ***R*** forgatási mátrix elemeiből számíthatók

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad , \; \alpha_X = arc\,tg\left(\frac{r_{23}}{r_{33}}\right) \quad , \; \beta_Y = arc\,sin\left(-r_{13}\right) \quad , \; \gamma_Z = arc\,tg\left(\frac{r_{12}}{r_{11}}\right) \tag{41}$$

ahol α, β és γ az ***X, Y*** és ***Z*** tengelyek körüli forgásszögeket jelölik.

A kavaternió algebra alkalmazásán alapuló dátum transzformációs algoritmus végezetül az alábbiak szerint foglalható össze

1. A súlypontra vonatkozó $\Delta s_i, \Delta p_i$ koordináták számítása (22) egyenlet
2. Az ***N*** mátrix számítása (36) egyenlet
3. Az ***N*** mátrix sajátértékeinek és sajátvektorainak számítása. Az ***N*** mátrix sajátvektorához tartozó maximális sajátérték a ***Q*** kvaternió megoldása
4. Az ***R*** forgatási mátrix számítása (40) egyenlet
5. *k* méretarány paraméter számítása (30) egyenlet
6. ***t*** eltolás paraméter számítása (27) egyenlet

4 TH program

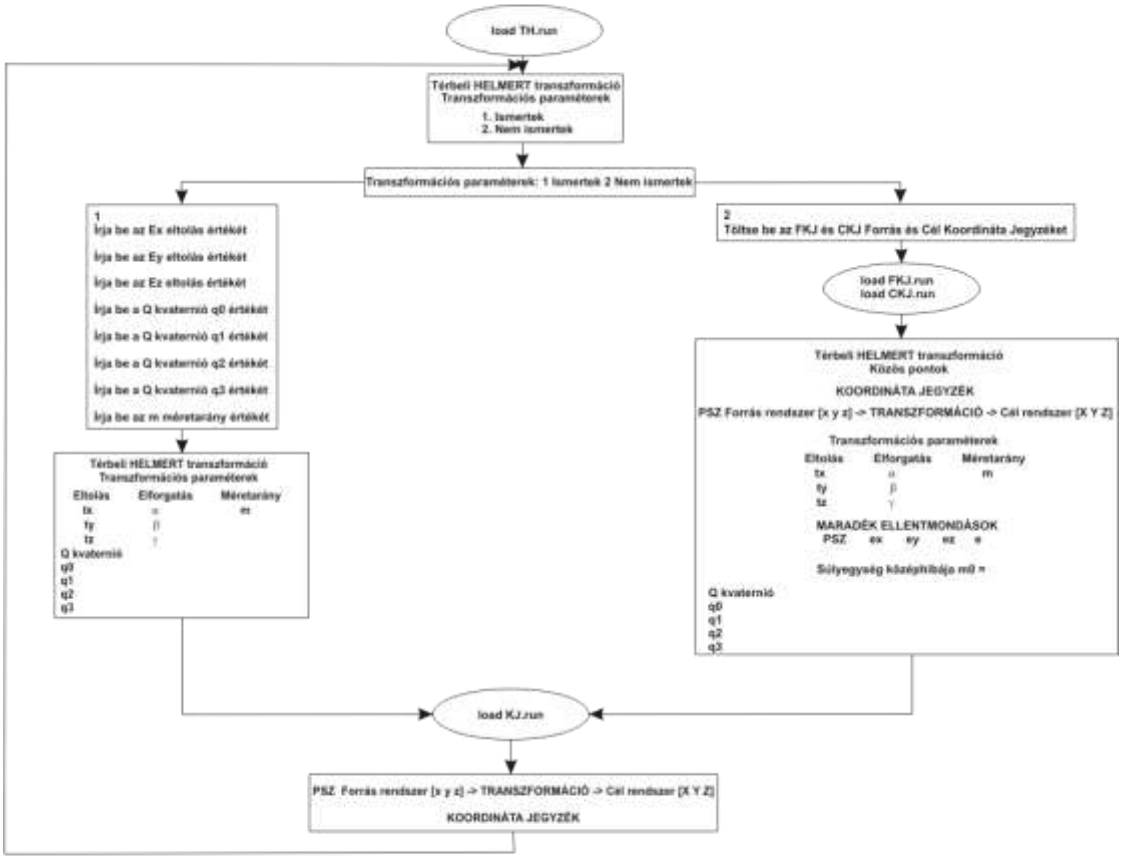
A **T**érbeli **H**elmert transzformáció megoldására az alábbiakban ismertetett *J nyelvű* programot készítettük (2. melléklet). A program fájlból történő betöltése után először transzformációs paramétereket határozunk meg a `p''` bevitele után megjelenő listából.

4.1 *Ismert transzformációs paraméterek* esetén a program az E_X, E_Y, E_Z eltolás értékeket, a ***Q*** kvaternió q_0, q_1, q_2, q_3 elemeinek értékekeit és a *k* méretarányt kéri.

4.2 *Ismeretlen transzformációs paraméterek* esetén, a mindkét rendszerben adott, forrás- és célkoordinátákat tartalmazó `FKJ` és `CKJ` közös pontok koordinátáit tartalmazó fájlok betöltése után, a program kiszámítja a transzformációs paramétereket. Az E_X, E_Y, E_Z eltolás értékeket, az α, β, γ elforgatásokat a k méretarányt, a $\boldsymbol{Q}$ kvaternió q_0, q_1, q_2, q_3 elemeit. Ezek után a maradék ellentmondások számítása következik. A program a közös pontok alapján meghatározott transzformációs paraméterek felhasználásával, a forrás rendszerbeli közös pontokat a cél rendszerbe transzformálja. A célrendszerben adott és transzformált koordináták különbségeként számítja az e_x, e_y, e_z maradék ellentmondások három összetevőjét, továbbá ezek felhasználásával térbeli Pitagorasz tétellel az e maradék ellentmondás vektort, amely a transzformált pont és az eredeti ponthely térbeli távolsága. A két rendszer illeszkedésének jellemzésére a program kiszámítja az m_0 súlyegység középhibáját az

$$m_0 = \sqrt{\frac{\Sigma\left(e_x^2 + e_y^2 + e_z^2\right)}{3n - 7}} \tag{42}$$

összefüggés alapján, ahol n a mindkét rendszerben adott közös pontok számát jelöli.



1. ábra. Térbeli Helmert transzformáció folyamatábrája

4.3 *Térbeli Helmert transzformáció*. Az átszámítandó pontokat tartalmazó `KJ` koordináta jegyzék fájl beolvasása után a program a forrás rendszerben adott pontok [x y z] koordinátáit az [X Y Z] célrendszerbe transzformálja. A transzformáció lépései a folyamatábrán láthatók 1. ábra.

Abból a célból, hogy bemutassuk a (36) (40) (30) és (27) összefüggések érvényességét megismételtük Grafarend és Avange (2003) és Shan – Chan – Zheng (2006) számításait. Az eredmények teljes egyezést mutatnak úgy a transzformációs paraméterek mind pedig, a transzformált koordináták és maradék ellentmondások tekintetében (1. Melléklet). Elvégeztük az OGPSH 24, 43 és 1151 pontjának felhasználásával a transzformációs paraméterek meghatározását, a *bemérés* (WGS84 XYZ →IUGG67 XYZ) és *kitűzés* (IUGG67 XYZ → WGS84 XYZ) feladatok esetén (3. melléklet).

5 Összefoglalás

A dátumtranszformáció széles körben alkalmazott a geodéziában és a kartográfiában. Számos algoritmus használata javasolt. Az algoritmusok többsége azonban kicsiny forgásszögek feltételezésén alapszik, továbbá linearizálás szükséges a transzformációs paraméterek széleskörű gyakorlati felhasználás céljára történő meghatározásához. Ez a dolgozat kvaternió algebra alkalmazásán alapuló dátumtranszformációs analitikus megoldást mutatott be a paraméterek meghatározására. Ennek az algoritmusnak a legnagyobb előnye, hogy nincs szükség linearizálásra és iterációra a transzformációs paraméterek számításához egy nem lineáris transzformációs modellben. A módszer tetszőleges nagyságú szögelfordulások esetében alkalmazható. Az algoritmus alkalmazhatóságát számpéldán mutattuk be. Azonban meg kell jegyezzük, hogy analitikus megoldáskor, bizonyos egyszerűsítéseket kellett alkalmazzunk a pontok hibáinak függetlenségére vonatkozóan. Ezek nélkül nem lehetséges az analitikus megoldás. Ez a fő hátrány ezeknél az algoritmusoknál. Mindazonáltal a módszer elfogadható eredményt adott.

Irodalom

1. Grafarend EW, Awange LJ (2003): Nonlinear analysis of the threedimensional datum transformation [conformal group C7(3)]. J Geod 77:66–76
2. HamiltonWR (1853): Lectures on quaternions: containing a systematic statement of a Newmathematical method, Hodges and Smith, Dublin
3. Papp et al. (1997): GPS network transformation into different datums and projection systems. Reports on Geodes, No.4(27), 265-280.
4. Papp at al. (2002): Hungarian GPS Network Transformation into Different Datums and Projection Systems. Per. Pol. Civ. Eng. (46/2), 199-204
5. Papp E - Szűcs L (2005): Földi és műholdas hálózatok transzformációja Geomatikai Közlemények VIII. 85-92
6. Vaníˇcek P, Steeves RR (1996): Transformation of coordinates between two horizontal geodetic datums. J Geod 70:740–745
7. Vaníˇcek P, Novák P, Craymer MR, Pagiatakis S (2002): On the correct determination of transformation parameters of a horizontal geodetic datum. Geomatica 56(4):329–340
8. WelschWM(1993): A general 7-parameter transformation for the combination, comparison and accuracy control of the terrestrial and satellite network observations. Manuscr Geod 17:210–214

9. Yang Y (1999): Robust estimation of geodetic datum transformation. J Geod 73:268–274
10. Y.-Z. Shen · Y. Chen · D.-H. Zheng (2006): A quaternion-based geodetic datum transformation algorithm J Geod 80: 233–239

A szerző elérési adatai

Papp Erik
Szent István Egyetem
Ybl Miklós Építéstudományi Kar
1146 Budapest
Thököly út 74
Tel. +36 1 252-1270
Email: papp.erik@ybl.szie.hu

1. Melléklet

```
   load'math/lapack math/lapack/dgeev'
   coinsert'jlapack'

   load'H:\TH.run'

   p''
                                   Térbeli HELMERT transzformáció

                                    Transzformációs paraméterek

                                           1 Ismertek
                                           2 Nem ismertek

Transzformációs paraméterek: 1 Ismertek 2 Nem ismertek
2
Töltse be az FKJ és CKJ Forrás és Cél Koordináta Jegyzéket
=======================================================================================

   load'H:\FKJG.run'
   load'H:\CKJG.run'

   FKJ tp CKJ

=======================================================================================

                                      Térbeli HELMERT transzformáció
                                               Közös pontok
   PSZ            Forrás rendszer [x y z] -> TRANSZFORMÁCIÓ -> Cél rendszer [X Y Z]

=======================================================================================

                                        KOORDINÁTA JEGYZÉK
Solitude         4157222.543  664789.307 4774952.099 4157870.237  664818.678 4775416.524
Bouch Zeil       4149043.336  688836.443 4778632.188 4149691.049  688865.785 4779096.588
Hohenneuffen     4172803.511  690340.078 4758129.701 4173451.354  690369.375 4758594.075
Kuehlenberg      4177148.376  642997.635 4760764.800 4177796.064  643026.700 4761228.899
Ex Mergelaec     4137012.190  671808.029 4791128.215 4137659.549  671837.337 4791592.531
Ex Hof Asperg    4146292.729  666952.887 4783859.856 4146940.228  666982.151 4784324.099
Ex Kaisersbach   4138759.902  702670.738 4785552.196 4139407.506  702700.227 4786016.645
                                        n = 7 közös pont
=======================================================================================
```

```
                              Transzformációs paraméterek
              Eltolás               Elforgatás             Méretarány
       641.88042527250946   0   0  _0.998497670887   1.0000055825198522
        68.65534545248374   0   0   0.893695764524
       416.39818477910012   0   0   0.993087729872

=======================================================================================

                                    MARADÉK ELLENTMONDÁSOK [mm]
   PSZ                        ex              ey              ez              e
Solitude                      94             135             140             216
Bouch Zeil                    59             _50              14              78
Hohenneuffen                 _40             _88              _8              97
Kuehlenberg                   20             _22             _87              92
Ex Mergelaec                 _92              14              _5              93
Ex Hof Asperg                _12               7             _55              56
Ex Kaisersbach               _29               4               2              30

=======================================================================================

                             Súlyegység középhibája: m0 = 0.077233660859330686

=======================================================================================

Q kvaternió
q0 =  _0.99999999999183
q1 =  _0.00000242043187
q2 =   0.00000216637384
q3 =   0.00000240731783

=======================================================================================

   load'H:\KJG.run'

   TH KJ

=======================================================================================

   PSZ            Forrás rendszer [x y z] -> TRANSZFORMÁCIÓ -> Cél rendszer [X Y Z]

=======================================================================================

                                          KOORDINÁTA JEGYZÉK
Solitude        4157222.543  664789.307 4774952.099 4157870.143  664818.543 4775416.384
Bouch Zeil      4149043.336  688836.443 4778632.188 4149690.990  688865.835 4779096.574
Hohenneuffen    4172803.511  690340.078 4758129.701 4173451.394  690369.463 4758594.083
Kuehlenberg     4177148.376  642997.635 4760764.800 4177796.044  643026.722 4761228.986
Ex Mergelaec    4137012.190  671808.029 4791128.215 4137659.641  671837.323 4791592.536
Ex Hof Asperg   4146292.729  666952.887 4783859.856 4146940.240  666982.144 4784324.154
Ex Kaisersbach  4138759.902  702670.738 4785552.196 4139407.535  702700.223 4786016.643

=======================================================================================

   p''
                                     Térbeli HELMERT transzformáció

                                      Transzformációs paraméterek

                                             1 Ismertek
                                             2 Nem ismertek

Transzformációs paraméterek: 1 Ismertek 2 Nem ismertek
1
Írja be az Ex eltolás értékét:
641.88042527250946
Írja be az Ey eltolás értékét:
68.65534545248374
Írja be az Ez eltolás értékét:
416.39818477910012
Írja be a Q kvaternió q0 értékét:
_0.99999999999183
Írja be a Q kvaternió q1 értékét:
```

```
_0.00000242043187
Írja be a Q kvaternió q2 értékét:
0.00000216637384
Írja be a Q kvaternió q3 értékét:
0.00000240731783
Írja be az m méretarány értékét:
1.0000055825198522

=====================================================================================


                                    Térbeli HELMERT transzformáció
                          Transzformációs paraméterek
                  Eltolás              Elforgatás           Méretarány
            641.88042527250946   0   0  _0.998497670001   1.0000055825198522
             68.65534545248374   0   0  _0.893695764435
            416.39818477910012   0   0   0.993087728441

=====================================================================================

Q kvaternió
q0 =  _0.99999999999183
q1 =  _0.00000242043187
q2 =  _0.00000216637384
q3 =   0.00000240731783

=====================================================================================

   load'H:\KJG.run'

   TH KJ

=====================================================================================

   PSZ            Forrás rendszer [x y z] -> TRANSZFORMÁCIÓ -> Cél rendszer [X Y Z]

=====================================================================================

                                        KOORDINÁTA JEGYZÉK
Solitude        4157222.543  664789.307 4774952.099 4157870.143  664818.543 4775416.384
Bouch Zeil      4149043.336  688836.443 4778632.188 4149690.990  688865.835 4779096.574
Hohenneuffen    4172803.511  690340.078 4758129.701 4173451.394  690369.463 4758594.083
Kuehlenberg     4177148.376  642997.635 4760764.800 4177796.044  643026.722 4761228.986
Ex Mergelaec    4137012.190  671808.029 4791128.215 4137659.641  671837.323 4791592.536
Ex Hof Asperg   4146292.729  666952.887 4783859.856 4146940.240  666982.144 4784324.154
Ex Kaisersbach  4138759.902  702670.738 4785552.196 4139407.535  702700.223 4786016.643

=====================================================================================
```

2. Melléklet TH program lista

```
NB.==============================================================================
NB.        Térbeli HELMERT transzformáció kvaternióval J nyelven (J602a)
NB.                  Bursa-Wolf hasonlósági transzformáció
NB.                     Fájlból történő átszámítás
NB.                Ismert transzformációs paraméterek: p’’
NB.       Transzformációs paraméterek közös pontok alapján: FKJ tp CKJ
NB.                   Új pontok transzformálása : TH KJ
NB.==============================================================================

   pps=:9!:11     NB. set print precision
   pps 20

   vonal=: 0 : 0

=====================================================================================
)

   mp=: +/ . *    NB. Matrix product

   dmstor=:3 :'1r180p1*1r60#.|."1:y'
   rtodms=:3 :',4j0 4j0 17j12":,"2 s*0 60 60#:3600*1r180p1%~|y[s=.*y'
```

```
   display =: (1!:2) & 2
   p=: 3 : 0
display'                                     Térbeli HELMERT transzformáció'
display''
display'                                      Transzformációs paraméterek'
display''
display'                                             1 Ismertek'
display'                                             2 Nem ismertek'
display''
display'Transzformációs paraméterek: 1 Ismertek 2 Nem ismertek'
W=:".w[w=: (1!:1)1
''
if. W=1 do.
display'Írja be az Ex eltolás értékét:'
tx=: (1!:1)1
display'Írja be az Ey eltolás értékét:'
ty=: (1!:1)1
display'Írja be az Ez eltolás értékét:'
tz=: (1!:1)1
display'Írja be a Q kvaternió q0 értékét:'
q0=: (1!:1)1
display'Írja be a Q kvaternió q1 értékét:'
q1=: (1!:1)1
display'Írja be a Q kvaternió q2 értékét:'
q2=: (1!:1)1
display'Írja be a Q kvaternió q3 értékét:'
q3=: (1!:1)1
display'Írja be az m méretarány értékét:'
k=: (1!:1)1
k=:".k[t=:3 1$tx,ty,tz[tx=:".tx[ty=:".ty[tz=:".tz[q=:3
1$q1,q2,q3[q0=:".q0[q1=:".q1[q2=:".q2[q3=:".q3
I=:3 3$1 0 0 0[Cq=:3 3$0,(-q3),q2,q3,0,(-q1),(-q2),q1,0    NB. R forgatási mátrix
R=:R1+R2[R2=:2*(q mp |:q) +(3 3$ , q0) * Cq[R1=: I * 3 3$ ,(q0^2) -(|:q) mp q
Ez=: rtodms _3 o. 1{r % 0{r[Ey=: rtodms _1 o. -2{r[Ex=: rtodms _3 o. 5{r % 8{r[r=:,R
E=:Ex,Ey,:Ez                                              NB. forgatások
c16=:'                                    Térbeli HELMERT transzformáció'
c22=:'                          Transzformációs paraméterek'
c23=:'               Eltolás            Elforgatás            Méretarány'
c6=:d,e,:f[d=:21j16":,k[e=:'',(":U )[f=:'',(":U )[U=:''
c24=:,.(30j14":t),.(":E),.c6
UQ=:('Q kvaternió'),('q0 = ',18j14":q0),('q1 = ',18j14":q1),('q2 = ',18j14":q2),:('q3 =
',18j14":q3)
vonal,c16,c22,c23,c24,vonal,UQ,vonal
elseif. W=2 do.'Töltse be az FKJ és CKJ Forrás és Cél Koordináta Jegyzéket',vonal end.
)

   tp=: 4 : 0  NB. Transzformációs paraméterek számítása közös pontok alapján
BS=:(".BKJ)-"1 RB=:(+/%#)".BKJ=:>,15}."1&.>,.CKJ[AS=:(".AKJ)-"1
RA=:(+/%#)".AKJ=:>,15}."1&.>,.FKJ
i=:0[n=:0{$AKJ[N=:0
while. i<n do.
   Cds=:3 3$0,(-zs),ys,zs,0,(-xs),(-ys),xs,0[xs=:0{ds[ys=:1{ds[zs=:2{ds[ds=:,.i{AS
   Cdp=:3 3$0,(-zp),yp,zp,0,(-xp),(-yp),xp,0[xp=:0{dp[yp=:1{dp[zp=:2{dp[dp=:,.i{BS
   n11=:(|:ds) mp dp[n12=:(|:-ds) mp Cdp
   n21=:-Cds mp dp[n22=:(ds mp |:dp) + (Cds mp Cdp)
   N=:N+(n11,.n12),(n21,.n22)                      NB. N mátrix
   i=:i+1
end.
maxse=:>. / se[se=:,se[se=:>1{sesv[sesv=:,.geev N
Q=:|:maxsei{"1 sv[sv=:>0{sesv[maxsei=:se i. maxse          NB. Q kvaternió
q=:3 1$q1,q2,q3[q3=:3{Q[q2=:2{Q[q1=:1{Q[q0=:0{Q
I=:3 3$1 0 0 0[Cq=:3 3$0,(-q3),q2,q3,0,(-q1),(-q2),q1,0 NB. R forgatási mátrix
R=:R1+R2[R2=:2*(q mp |:q) +(3 3$ , q0) * Cq[R1=: I * 3 3$ ,(q0^2) -(|:q) mp q
j=:0[n=:0{$AKJ[A=:0[B=:0
while. j<n do.
   dp=:,.j{BS[ds=:,.j{AS
   B=:B+(|:dp) mp dp[A=:A+(|:ds) mp R mp dp
   j=:j+1
end.
k=:A%B                                      NB. k méretarány
t=:3 1$1{"1[e=: RA- (3 3$,k)*R mp RB               NB. t eltolás
```

```
Ez=: rtodms _3 o. 1{r % 0{r[Ey=: rtodms _1 o. -2{r[Ex=: rtodms _3 o. 5{r % 8{r[r=:,R
E=:Ex,Ey,:Ez                                               NB. forgatások
m=:3 3$,k,0,0,0,k,0,0,0,k[i=:0[n=:0{$AKJ[TKJ=:0 3$0[P=:>,.15{. "1&.>,.FKJ
while. i<n do.
   TKJ =:TKJ,RA + m mp R mp bs[bs=:i{ BS
   i=:i+1
end.
Tav=:+/&.*:/                                   NB. térbeli Pitagórasz
T=:1e3*Tav"1 me[me=:(".AKJ) - TKJ                     NB. e maradék ellentmondások
m0=:%:(+/*:T%1e3) % (3*n)-7                                NB. mo súlyegység középhibája
c16=:'                                       Térbeli HELMERT transzformáció'
c17=:'                                                Közös pontok'
c18=:'   PSZ             Forrás rendszer [x y z] -> TRANSZFORMÁCIÓ -> Cél rendszer [X Y
Z]'
c20=:'                                           KOORDINÁTA JEGYZÉK'
PO=:P[KJA=:12j3":(".AKJ)[KJB=:12j3":(".BKJ)[P=:>,15{."1&.>,FKJ
c19=:(":PO),.(":KJB),.(":KJA)
c21=:'                                           n = ',(":n),' közös pont'
c22=:'                                   Transzformációs paraméterek'
c23=:'                  Eltolás          Elforgatás           Méretarány'
c6=:d,e,:f[d=:21j16":,k[e=:'',(":U )[f=:'',(":U )[U=:''
c24=:,.(30j14":t),.(":E),.c6
c27=:'                                         MARADÉK ELLENTMONDÁSOK [mm]'
c28=:'   PSZ                        ex              ey              ez              e'
c29=:(":PO),.(16j0":1e3*me),.(16j0":,.T)
c25=:'                          Súlyegység középhibája: m0 = ',":m0
UQ=:('Q kvaternió'),('q0 = ',18j14":q0),('q1 = ',18j14":q1),('q2 = ',18j14":q2),:('q3 =
',18j14":q3)
vonal,c16,c17,c18,vonal,c20,c19,c21,vonal,c22,c23,c24,vonal,c27,c28,c29,vonal,c25,vonal,
UQ,vonal
)


    TH=:3 : 0  NB. Térbeli HELMERT transzformáció: Új pontok transzformálása
i=:0[n=:0{$KJ[KJT=:0 3$0[P=:>,15{."1&.>,KJ[AKJ=:>,15}."1&.>,.KJ
m=:3 3$,k,0,0,0,k,0,0,0,k
while. i<n do.
   KJT=:KJT,(,t) + m mp R mp kj[kj=:i{(".AKJ)
   i=:i+1
end.
PO=:P[KJ1=:12j3":".>,15}."1&.>,.KJ[KJ2=:12j3":KJT
c13=:'   PSZ             Forrás rendszer [x y z] -> TRANSZFORMÁCIÓ -> Cél rendszer [X Y
Z]'
c14=:'                                           KOORDINÁTA JEGYZÉK'
c15=:(":PO),.(":KJ1),.(":KJ2)
vonal,c13,vonal,c14,c15,vonal
)
```

3. Melléklet Transzformációs paraméterek az OGPSH hálózatban

Transzformációs paraméterek 24 OGPSH pont felhasználásával

Bemérés

```
                           Transzformációs paraméterek
              Eltolás                Elforgatás             Méretarány
       47.74933348270133   0   0   0.306123808591   1.0000021579325942
      _69.28041060944088   0   0  _0.065931015976
      _10.99728770926595   0   0   0.470623193073

                 Súlyegység középhibája: m0 = 0.3241854318337738
```

Q kvaternió
_0.9999999999990612
7.4206523491964712e_7
_1.5982044620896585e_7
1.1408229318445963e_6

Kitűzés

Transzformációs paraméterek

Eltolás			Elforgatás	Méretarány
_47.74934213329107	0	0	_0.306123959022	0.9999978420598722
69.28015322983265	0	0	0.065930317510	
10.99740835465491	0	0	_0.470623290923	

Súlyegység középhibája: m0 = 0.32418473228911937

Q kvaternió
0.9999999999990612
7.4206523491964712e_7
_1.5982044620896585e_7
1.1408229318445963e_6

Transzformációs paraméterek 43 OGPSH pont felhasználásával

Bemérés

Transzformációs paraméterek

Eltolás			Elforgatás	Méretarány
47.09499303298071	0	0	0.263032373949	1.0000020978530781
_67.88777859602124	0	0	_0.096984246011	
_10.49329041223973	0	0	0.488207598695	

Súlyegység középhibája: m0 = 0.37292629217956724

Q kvaternió
0.99999999999906874
_6.3760874555051456e_7
2.3509569201293768e_7
_1.18344876524293e_6

Kitűzés

Transzformációs paraméterek

Eltolás			Elforgatás	Méretarány
_47.09499386139214	0	0	_0.263032603500	0.9999979021351638
67.88753455318511	0	0	0.096983623440	
10.49340822361410	0	0	_0.488207722370	

Súlyegység középhibája: m0 = 0.37292550982340555

Q kvaternió
_0.99999999999906874
_6.3760874555051456e_7
2.3509569201293768e_7
_1.18344876524293e_6

Transzformációs paraméterek 1151 OGPSH pont felhasználásával

Bemérés

Transzformációs paraméterek

Eltolás			Elforgatás	Méretarány
53.41677557630464	0	0	0.142687965708	1.0000020425996370
_64.83033404103480	0	0	0.176147282232	
_16.46120938099921	0	0	0.500099295632	

Súlyegység középhibája: m0 = 0.25089784540964433

Q kvaternió
_0.99999999999911426
3.4588487189221364e_7
4.2699348088853207e_7
1.2122747544867055e_6

Kitűzés

```
                     Transzformációs paraméterek
        Eltolás            Elforgatás            Méretarány
_53.41677066683769   0   0  _0.142687538630   0.9999979573950342
 64.83007442043163   0   0  _0.176147628185
 16.46131043229252   0   0  _0.500099173778

        Súlyegység középhibája: m0 = 0.25089733292912053
```

Q kvaternió
0.99999999999911426
3.4588487189221364e_7
4.2699348088853207e_7
1.2122747544867055e_6