

# Koordináta transzformációk: elmélet és gyakorlat

Gyenes Róbert\* – Kulcsár Attila\*\*

\*NYME GEO Geodézia Tanszék, \*\*NYME GEO Informatika Központ

## 1. Bevezetés

Talán nem túlzás azt állítani, kevés olyan terület van a matematikai geodéziában, amelyről olyan sok publikáció született, mint a koordináta transzformáció. Beszéljünk akár felmérési, akár geodéziai vagy távérzékelési feladatokról, a koordináta transzformációk mindennapos alkalmazást kapnak a gyakorlatban.

A koordináta transzformációkat azonban tudni kell jól alkalmazni, ismerni kell a feladathoz éppen megfelelő funkcionális és sztochasztikus modellt. Amíg a funkcionális modell területén több lehetőségünk van a választásra, addig a sztochasztikus modell kiválasztásakor már problémákba ütközünk. Egyes alkalmazásokban nem rendelkezünk megfelelő sztochasztikus információval a felhasznált koordinátákról. Ezekben az esetekben különböző egyszerűsítésekkel élünk. Tipikus példa erre a transzformációs paraméterek kiegyenlítéssel történő számítása, amelynek során a koordinátákat egymástól függetlennek és azonos pontosságúaknak tekintjük, annak ellenére, hogy tudjuk, ez valójában nem igaz. Hasonlóan független súlyozást alkalmazunk például újra súlyozott iteratív robusztus kiegyenlítéssel történő számolásakor is.

További probléma a maradék ellentmondások kezelése, hiszen azokat gyakran a két rendszer illesztésének pontossági vizsgálatára használjuk fel, de az ellentmondásokat az átszámítandó pontok esetén már nem kezeljük. Jelen tanulmányunkban ezen problémák gyakorlati szempontból történő megközelítésével foglalkozunk, és azaz, hogyan lehet ezt korszerűen, szoftveresen is megoldani, közelebb hozva a korszerűbb matematikai geodéziai ismereteket a felhasználók mindennapi geomatikai feladataihoz.

## 2. A funkcionális modell választásának szempontjai

A koordináta transzformációkat a kapcsolat típusa és a helymeghatározó adatok dimenziója alapján csoportosítjuk. Így a kapcsolat típusa alapján beszélünk hasonlósági, affin, projektív, magasabb fokú transzformációkról, stb. A helymeghatározás dimenziója alapján egy-, két- és háromdimenziós transzformációkról beszélünk. Egyes speciális alkalmazásokban szerepet játszik az idő is, így valójában szabatos értelemben nem szabad elfeledkeznünk az időről sem, mint negyedik dimenzióról.

Analóg térképek digitális átalakításakor síkbeli hasonlósági és affin transzformációt alkalmazunk a rajzhordozók méretváltozásának a modellezésére, de leggyakrabban affin transzformációt. Szoftver megoldásoktól függően lehetőségünk van magasabb fokú transzformációt is figyelembe venni. Ha elméleti szempontokat veszünk figyelembe, akkor magasabb fokú transzformációk közül szög tartó transzformációkat alkalmazunk, amelyekre fennállnak a Cauchy-Riemann feltételek. Sajnos ezeket a szempontokat a szoftverfejlesztők gyakran nem veszik, vagy egyáltalán nem veszik figyelembe. Az eredeti analóg térkép geometriai elemei között fennálló geometriai feltételek megtartása érdekében nem hagyhatjuk figyelmen kívül a kolinearitást sem, azaz az egy egyenesen lévő pontok a transzformáció eredményeként is egy egyenesre kell, hogy illeszkedjenek. Nyilvánvaló, hogy ezeknek a feltételeknek a magasabb fokú szög tartó vagy nem szög tartó transzformációk nem felelnek meg, ezért ennek a feltételnek a figyelembevételére affin transzformációt célszerű alkalmazni.

Térbeli transzformációkat vetületi rendszereink közötti átszámítások, különböző vonatkoztatási rendszerek vizsgálatok, fotogrammetriában, valamint speciális mérnökeodéziai feladatok során alkalmazunk. A térbeli transzformációk közül elsősorban a térbeli egybevágósági és a hasonlósági transzformációt alkalmazzuk.

Egybevágósági transzformációt alkalmazunk egyes esetekben dátum transzformációkra, mérnöki létesítmé-

nyek torzulásainak a kimutatására, valamint tervezett és megvalósult állapotok összehasonlítására. Térbeli hasonlósági transzformációt alkalmazunk különböző dátumparaméterű vetületi rendszerek közötti átszámítás során, vagy különböző dátumú vonatkoztatási rendszerek közötti vizsgálatra. A fotogrammetriában elsősorban a független modellekkel történő kiegyenlítés alkalmaz térbeli hasonlósági transzformációt.

A különböző vetületi rendszerek közötti átszámításra lehet alkalmazni síkbeli transzformációkat is, azonban ilyenkor tudni kell, hogy a paraméterek és a maradék ellentmondások magukban hordozzák az adott területre jellemző vetületi torzulásokat is. Ez különösen zavaró, ha két olyan vetületi rendszer között végzünk átszámítást, ahol a torzulási jellemzők helytől és iránytól való függősége eltérő. Ilyen fordulhat elő például hengervetület és sztereografikus vetület közötti átszámításkor. Ez a probléma csökkenti a síkbeli transzformáció területi kiterjeszhetőségének a nagyságát. Ennek ellenére a gyakorlatban sokszor alkalmazzák, és mint látjuk, sajnos nem megfelelően. A helyes megoldás az, ha a vetületi koordinátákból térbeli koordinátákat számolunk, és a transzformációs paraméterek meghatározását térbeli koordináták alapján végezzük. Az alkalmazott funkcionális modell a leggyakrabban itt is a térbeli hasonlósági transzformáció, de gyakran alkalmaznak térbeli affin vagy magasabb fokú transzformációkat is. Bizonyítás nélkül megemlítjük, hogy magasabb fokú, szögtartó térbeli transzformáció nem létezik, mert a Cauchy-Riemann feltételek nem elégíthetők ki egyidejűleg a koordinátahármasokra.

### 3. Az ellentmondások problémája és kezelése

A transzformációs paramétereket azonos pontok alapján kiegyenlítéssel számoljuk. Részben a választott funkcionális modell hibája, részben a koordináták, mint sztochasztikus változók következtében az azonos pontok célkoordinátarendszerbe transzformált koordinátái nem egyeznek meg az adott célkoordinátarendszerbeli koordinátákkal, azaz ellentmondások lépnek fel. Szintén ellentmondásokat kapunk sztochasztikus változónak tekintett paraméterekre vonatkozóan is. Ilyen fordul elő tipikusan a fotogrammetriában a külső tájékozási elemek meghatározásánál, ahol a vetítési középpont koordinátáit kinematikus GPS mérésekből előzetesen le lehet vezetni, vagy a mérnökgeodéziában, ahol a dőlésérzékelők által szolgáltatott értékek a forgatási szögek előzetes, sztochasztikus változónak tekintett értékei a kiegyenlítés végrehajtása során.

Az ellentmondások kezelését kiegyenlítéssel biztosítjuk, általában a legkisebb négyzetek módszerét alkalmazva. Gyakran javasolnak robusztus kiegyenlítési módszereket a paraméterek meghatározására, ez azonban a gyakorlatban továbbra is nehezen terjed, elsősorban azért, mert ez a terület olyan elméleti ismereteket kívánna meg a gyakorlati szakemberektől, amelyekre jelenleg tapasztalataink alapján nincsenek felkészülve.

Az átszámítandó pontokra vonatkozóan az ellentmondásokat általában nem kezeljük. Ennek egyik oka, hogy az ellentmondások értékei nem lépik túl a feladat által megkövetelt pontossági követelményeket. Ha például egy kataszteri térkép digitalizálására gondolunk, akkor figyelembe véve a külső és belső középpontokat, az örkeresztelnél mutatkozó ellentmondások középpontja eléri a 0.2 mm-t (Busics Gy., Engler P., Gyenes R., 2000), amely összhangban van a digitalizálandó részletpontok digitalizálási középpontjával.

GPS mérésekből kapott koordináták eltérő dátumba történő transzformációjakor azonban az ellentmondások elérhetik azt az értéket, amelyeket az átszámítandó pontokra már figyelembe kell vennünk. Magyarországon tipikusan ezzel szembesülünk, amikor EUREF koordinátákat transzformálunk az EOVS vonatkoztatási rendszerébe. Ha egy adott felmérési feladat esetén a földi méréseket csak transzformált EUREF koordinátákra alapozva végeznénk, akkor ez a hiba figyelmen kívül hagyható lenne, mert relatív értéke kilométerenként néhány milliméter. Ha azonban a földi méréseket mind EUREF koordinátákból transzformált koordinátákra, mind eredeti HD 72 koordinátákra támaszkodva végezzük, különösképpen azokra, amelyeket nem vontak be a transzformációs paraméterek számításába, akkor már ez a hiba nem méretarány jellegű szabályos hibát okoz. Ez pedig a földi mérések feldolgozásánál és elemzésénél nehézséget okozhat. Felmerül tehát a maradék ellentmondások interpolációjának a kérdése.

A matematikai és a matematikai geodéziai szakirodalomban különböző interpolációs módszerekkel találkozhatunk. Az interpolációs módszerek alapvetően két nagy csoportra oszthatók. Ezek a nem statisztikai alapú interpolációs módszerek, valamint a statisztikai alapú interpolációs módszerek.

A nem statisztikai alapú interpolációs módszerek közé sorolható a „TIN modell alapú” interpoláció, amikor az átszámítandó ponthoz valamilyen szempont szerint három azonos pontot rendelünk, és a közös pontoknál mutatkozó ellentmondások alapján kiegyenlítő sík felhasználásával végezzük el az interpolációt (Gyenes R., Kulcsár A., 2004). Hasonló elven alkalmazható a Delaunay-féle háromszögelés is (Kádár I., Papp E., 1999). Ezek a módszerek tulajdonképpen térbeli lineáris interpolációknak foghatók fel, azonban a közös pontok választásának szempontjai alapján nem egyértelműek. Nem statisztikai alapú interpoláció a spline függvények alapján történő interpoláció. Kétváltozós spline függvények közül itt elsősorban másod- és harmadfokú spline függvények jöhetnek szóba. Mind a háromszög-modell alapú, mind a spline interpolációs módszereknek az előnye, hogy a közös pontoknál az ellentmondásokat ellentmondás-mentesen lehet meghatározni.

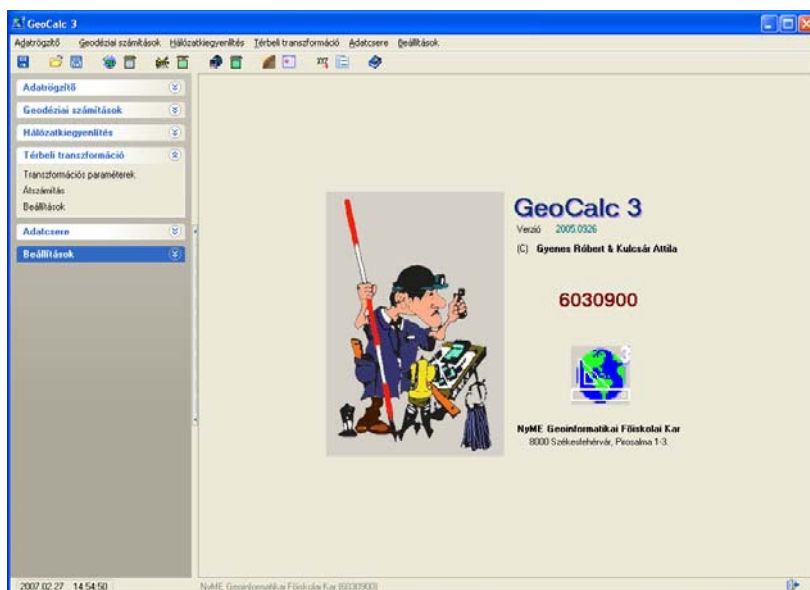
A statisztikai alapú interpolációs módszerek közül elsősorban a kollokációt (speciális esete a legkisebb négyzetek elvén alapuló interpoláció), valamint a krigelést (Steiner F., 1990) említhetjük meg. A krigelést elsősorban a geostatistikában alkalmazzák. A legkisebb négyzetek módszere szerinti interpoláció és a krigelés alapelveiben azonos, a különbség az interpolált értékek súlyainak számításában van. A krigelés esetén ugyanis a súlyok azzal a kényszerrel vannak meghatározva, hogy összegük egy legyen, másképpen fogalmazva normalizált súlyokkal dolgozunk. A statisztikai alapú interpolációk hátránya, hogy az átszámítandó és az azonos pontok ellentmondásainak kapcsolatát kifejező kovarianciamátrix nem egyértelmű. A kovarianciamátrix elemei ugyanis egy választott kovarianciafüggvénytől függenek, amelyek valamilyen formában a pontok közötti távolsággal fordítottan arányosak. A geodéziában elsősorban, ha alkalmazásra kerül, akkor a legkisebb négyzetek elvén alapuló interpolációt alkalmazzák. Statisztikai szempontból azonban a krigelés is minimális szórású becslést ad az interpolált értékekre, így elméleti szempontból sem szakadunk távol a legkisebb négyzetek módszerétől. Ezáltal tehát biztosítjuk, hogy mind a transzformációs paraméterek, mind az interpolált ellentmondások azonos elv alapján vannak meghatározva. Szintén statisztikai alapú interpolációról beszélünk, amikor az interpolálandó értékeket kétváltozós függvények paramétereinek felhasználásával határozzuk meg. Ennek a módszernek a hátránya, hogy a kétváltozós függvények paramétereit szintén kiegyenlítésből származnak, így az adott pontoknál az ellentmondásokat nem lehet ellentmondásmentesen meghatározni.

## 4. Alkalmazásfejlesztés

Korábbi tanulmányainkban (Gyenes R., Kulcsár A., 2003a, 2003b, 2004, 2006) többször beszámoltunk arról, hogy karunkon évek óta olyan szoftver fejlesztésén dolgozunk, amely mind gyakorlati, mind kutatási és oktatási célokra egyaránt alkalmazható. A szoftver a GeoCalc nevet kapta, amelynek egyik modulja a koordináta transzformációkkal kapcsolatos feladatok végrehajtását támogatja a fentebb leírt elméleti és gyakorlati szempontok figyelembevételével. Egyes speciális fejlesztések kizárólag a felhasználók kérésére készültek. Ilyen alkalmazás lett például a határfelméréseknél és a vonalas létesítményeknél jelentkező tömeges transzformálási feladatokkal kapcsolatos probléma hatékony megoldása, vagy a felhasználó által definiált paraméterek számítása. A számítások bemenő és kimenő adatairól, a paraméterek pontossági mérőszámairól, valamint az ellentmondásokról teljes körű, állami átvételre is alkalmas dokumentáció készíthető.

A koordináta transzformáció modul által nyújtott lehetőségeket az 1. ábra mutatja. A modul felépítése a következő:

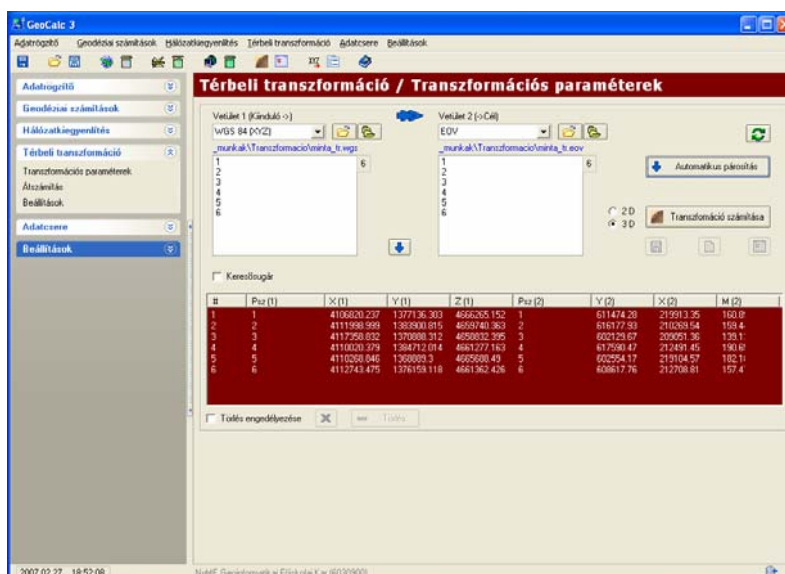
- Transzformációs paraméterek
- Átszámítás
- Beállítások



1. ábra. A transzformáció modul

A *Transzformációs paraméterek* menüben lehet elvégezni a paraméterek közös pontok alapján történő számítását. A forrás és a cél vonatkoztatási vagy vetületi rendszerek kiválasztása után lehet beolvasni a megfelelő koordináta állományokat (2. ábra). Jelenleg a következő vonatkoztatási vagy vetületi rendszerek közötti átszámítások végezhetőek el:

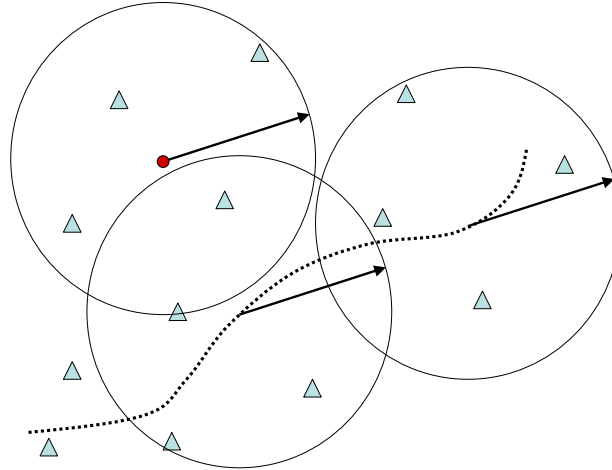
- EOV,
- Gauss-Krüger vetület,
- Érintő hengervetületek (HÉR, HKR, HDR),
- Sztereografikus vetület,
- UTM,
- Vetület nélküli rendszer,
- WGS 84 különböző koordináta formátumokban.



2. ábra. Transzformációs paraméterek számítása

A közös pontok neve vagy pontszáma alapján automatikus pontpárosítás végezhető el. Különleges opció a keresősugár alapján történő transzformáció (3. ábra), amellyel lehetőségünk van az átszámítandó pontok beolvasását

követően megadni, hogy egy tetszőleges átszámítandó ponthoz mekkora sugarú környezetben válasszon ki a program azonos pontokat. Ezáltal a számítási idő például vonalas létesítmények GPS-vel történő felmérésekor, vagy határfelméréskor, jelentősen lerövidül, mert nem szükséges egyedi paraméterkészletet számítani egyes pontokra vagy pontcsoportokra vonatkozóan. A szoftver így összesen annyi transzformációs paraméterkészletet számol, amennyi az átszámítandó pontok száma. Ezek külön elmenthetők egy paraméter állományba, így később ismételten felhasználhatók.



3. ábra. Transzformáció és átszámítás keresősugár alkalmazásával

A transzformációs paraméterek számításáról teljes körű dokumentáció készíthető, amely tartalmazza a következő adatokat:

- a forrás- és a célrendszerbeli koordinátákat,
- transzformációs paramétereket és középhibáikat,
- illeszkedés középhiba számítását,
- statisztikai kimutatásokat a maximális ellentmondások értékeiről,
- maradék ellentmondások dokumentációját, feltüntetve mind a geocentrikus, mind a topocentrikus komponenseket.

I. melléklet. A transzformációs paraméterek számítási dokumentációja

WGS 84 ---> EOV

**Transzformáció ellipsoid feletti magasságokkal**

Közös pontok száma = 6

Kiinduló koordináták (WGS 84 (XYZ) -> EOV)

Pontszám	X	Y	Z
1	4106820.2370	1377136.3030	4666265.1520
1	611474.2800	219913.3500	160.8900
2	4111998.9990	1383900.8150	4659740.3630
2	616177.9900	210269.5400	159.4400
3	4117958.8920	1370888.3120	4658832.3950
3	602129.6700	209051.3600	139.1300
4	4110020.3790	1384712.0140	4661277.1630
4	617590.4700	212491.4500	190.6500
5	4110268.8460	1368889.3000	4665688.4900
5	602554.1700	219104.5700	182.1800
6	4112743.4750	1376159.1180	4661362.4260
6	608617.7600	212708.8100	157.4700

**Maximális javítások kimutatása**

Pontszám vX	Pontszám vY	Pontszám vZ
5	1	6
0.0213	0.0158	-0.0461
Pontszám vE	Pontszám vN	Pontszám vH
1	6	6
0.0208	-0.0356	-0.0299

**Közös pontok és a javítások**

Pontszám	X	Y	Z	vX	vY	vZ
1	4106820.2370	1377136.3030	4666265.1520	-0.0183	0.0158	-0.0045
1	4106758.8973	1377204.9032	4666269.1607	0.0208	0.0060	-0.0117
2	4111998.9990	1383900.8150	4659740.3630	-0.0111	-0.0009	0.0290
2	4111937.6468	1383969.3833	4659744.5172	0.0027	0.0277	0.0140
3	4117958.8920	1370888.3120	4658832.3950	-0.0073	-0.0120	0.0122
3	4117297.4577	1370956.9853	4658836.4954	-0.0091	0.0161	0.0017
4	4110020.3790	1384712.0140	4661277.1630	0.0090	-0.0016	0.0013
4	4109959.0552	1384780.5649	4661281.2724	-0.0044	-0.0050	0.0064
5	4110268.8460	1368889.3000	4665688.4900	0.0213	-0.0001	0.0081
5	4110207.5291	1368957.9590	4665692.4881	-0.0068	-0.0093	0.0196
6	4112743.4750	1376159.1180	4661362.4260	0.0065	-0.0011	-0.0461
6	4112682.1351	1376227.7412	4661366.4545	-0.0031	-0.0356	-0.0299

**Transzformációs paraméterek és középhibák**

Számított paraméterek száma = 7

Számított paraméterek : Eltolás X, Eltolás Y, Eltolás Z, Forgatás X, Forgatás Y, Forgatás Z, Méretarány

Eltolás X = -5.5007 [m]      11.0099 [m]  
 Y = 100.0448 [m]      8.7844 [m]  
 Z = 16.2136 [m]      10.4160 [m]  
 Forgatás X = 0°00'01.08511"      0.27338 ["]  
 Y = 0°00'00.52840"      0.42123 ["]  
 Z = 0°00'00.21505"      0.26441 ["]  
 Méretarány = -8.13 [mm/km]      1.15 [mm/km]

Illeszkedés középhibája = 0.0206 [m]  
 Illeszkedés vízszintes középhibája = 0.0117 [m]  
 Illeszkedés magassági középhibája = 0.0123 [m]



A *Paraméter állomány* panelon lehetőség van korábban számított transzformációs paraméterek betöltésére, szerkesztésére, valamint más szoftver által számított, esetleg átvett paraméterek kézi bevitelére és elmentésére.

A *Számítandó paraméterek* panelen lehet beállítani, hogy mely transzformációs paraméterek számítására kerüljön sor. Megemlítjük, hogy a szoftverrel lehetőség adódik kiegyenlítő sík paramétereinek a számítására is egyetlen eltolás, és két forgatási paraméter számításának megadásával. Ez az egyedi megoldás szintén lehetővé teszi a szoftver egyéb, speciális célokra történő alkalmazását, például felületek deformációjának az elemzését.

Az *Interpoláció* a 3. fejezetben tárgyalt ellentmondások kezelését teszi lehetővé. Ezen opció aktiválásával az átszámítandó pontokra vonatkozóan megtörténik a maradék ellentmondások interpolációja. Jelenleg két alapvető interpolációs módszert tartalmaz a program. Ezek a krigelés és a háromszög modell. A krigelés esetén a krige-mátrix kovarianciáinak a számítására az alábbi,  $t$  távolságtól függő kovarianciafüggvények közül választhatunk:

- $\frac{1}{1+t}$
- $\exp(-t)$
- $\text{sinc}(t)$

Az interpolációval történő átszámításról szintén teljes dokumentáció készül, külön feltüntetve az interpolált ellentmondások értékeit (II. melléklet).

II. melléklet. Az átszámítás és az interpoláció számítási dokumentációja

Pontszám	X	Y	Z
A	4113380.5010	1371657.5480	4662148.7200
B	4111278.6910	1380186.6070	4661466.5470

Pontszám	vX	vY	vZ
A	0.0050	-0.0031	-0.0085
B	-0.0016	0.0010	-0.0075

## 5. Összefoglalás

Dolgozatunkban bemutattuk a koordináta transzformációk geomatikai alkalmazásának lehetőségeit, röviden ismertettük a funkcionális és a sztochasztikus modellek megválasztásának szempontjait. Elsősorban GNSS alapú alappont-meghatározások során szükséges lehet az ellentmondások kezelése, ezért ismertettük a különböző szóba jöhető interpolációs módszereket, és néhány kapcsolódó elméleti szempontot. Tekintettel arra, hogy a magas szintű matematikai háttér és a megfelelőbb matematikai modellek csak megfelelő szoftver felhasználásával vihetők közelebb a gyakorlati szakemberek számára, ezért mind elméleti, mind gyakorlati szempontokat figyelembevéve olyan szoftvercsomagot fejlesztettünk, amelynek felhasználásával egyszerűen és gyorsan elvégezhetők a koordináta transzformációval kapcsolatos mindennapi feladatok.

### Irodalom

**Banerjee S., Gelfand A. E. (2002):** Prediction, Interpolation and Regression for Spatially Misaligned Data. Indian Journal of Statistics, Vol. 64, Series A, 227-245.

**Bácsatyai L. (2006):** Magyarországi vetületek. Szaktudás Kiadó Ház.

**Briese C., Pfeifer N., Dorninger P. (2002):** Applications of the Robust Interpolation for DTM Determination. IAPRS Vol. XXXIV, 3A, pp. 55 - 61, Graz, 9 - 13 September 2002.

**Busics Gy., Engler P., Gyenes R. (2000):** Digitális adatgyűjtés. SDILA jegyzet. SE FFFK, Székesfehérvár.

**Ge L., Chang H.C., Janssen V., Rizos C. (2003):** Integration of GPS, Radar Interferometry and GIS for Ground Deformation Monitoring. University of New South Wales, Sydney, Australia.

**Gyenes R., Kulcsár A. (2003 a):** Geodéziai mérések feldolgozását támogató szoftverek fejlesztése a GEO-ban. Geodézia és Kartográfia, 2003/1.

**Gyenes R., Kulcsár A. (2003 b):** Geodéziai mérések korszerű feldolgozása a mindennapi gyakorlatban. GIS Open konferencia, Székesfehérvár, 2003.

**Gyenes R., Kulcsár A. (2004):** GeoCalc 3 Geodéziai adatfeldolgozó program. ISBN 9634603289.

**Gyenes R., Kulcsár A. (2006):** Digitális szintezőműszerrel végzett mérések feldolgozása. Geodézia és Kartográfia, 2006/1.

**Gyenes R.(2007):** A geomatika alapjai. Jegyzet. NYME GEO, 2007.

**Kádár I., Papp E. (1999):** Dirichlet sokszögelés és háromszögelés a magyar GPS hálózatban. Ezredvégi helymeghatározás. 12. Kozmikus Geodéziai Szeminárium, Székesfehérvár.

**Meyer T.H. (2004):** The Discontinuous Nature of Kriging Interpolation for Digital Terrain Modelling. University of Connecticut.

**Rossiter D.G. (2007):** Co-Kriging with the Gstat Package of the R Environment for Statistical Computing. International Institute for Geo-Information Science and Earth Observation (ITC).

**Steiner F. (1990):** A geostatistika alapjai. Tankönyvkiadó, Budapest.

## Kapcsolat

Gyenes Róbert  
Nyugat-Magyarországi Egyetem  
Geoinformatikai Kar  
Székesfehérvár  
Pirosalma u. 1-3.  
Tel. 06 22 516 564  
Fax 06 22 516 521  
Email: [gyr@geo.info.hu](mailto:gyr@geo.info.hu)  
Honlap: [www.geocalc.hu](http://www.geocalc.hu)  
[www.geo.info.hu](http://www.geo.info.hu)

Kulcsár Attila  
Nyugat-Magyarországi Egyetem  
Geoinformatikai Kar  
Székesfehérvár  
Pirosalma u. 1-3.  
Tel. 06 22 516 555  
Fax 06 22 516 521  
Email: [ka@geo.info.hu](mailto:ka@geo.info.hu)  
Honlap: [www.geocalc.hu](http://www.geocalc.hu)  
[www.geo.info.hu](http://www.geo.info.hu)