DURVA HIBASZŰRÉS A FOTOGRAMMETRIAI TÉRBELI HÁTRAMETSZÉS KIEGYENLÍTÉSEKOR

Jancsó Tamás *

Bevezetés

A fotogrammetriai térbeli hátrametszés megoldása több szempontból is fontos probléma. Ha ezt a feladatot egy sztreoképpár esetében megoldjuk, akkor lehetőségünk nyílik a térbeli kiértékelésre, DTM (digitális terepmodell) előállítására.

Fotogrammetriában a térbeli hátrametszés feladata más szavakkal azt jelenti, hogy meghatározzuk a mérőképhez tartozó külső tájékozási elemeket. Ehhez általában a kollineár egyenletekből indulnak ki:

$$
\begin{aligned}
x &= -c_k \frac{r_{11}(X - X_O) + r_{21}(Y - Y_O) + r_{31}(Z - Z_O)}{r_{13}(X - X_O) + r_{23}(X - X_O) + r_{33}(X - X_O)} \\
y &= -c_k \frac{r_{12}(X - X_O) + r_{22}(Y - Y_O) + r_{32}(Z - Z_O)}{r_{13}(X - X_O) + r_{23}(X - X_O) + r_{33}(X - X_O)}
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

<u>Jelölések:</u>

x, y : a képfőpontra redukált képkoordináták

X, Y, Z : terepi koordináták

X_O, Y_O, Z_O : vetítési centrum koordinátái

r_{ij} : irány koszinusz, ahol minden $r_{ij} = f(\varphi, \omega, \kappa)$

c_k : kamera állandó (fókusztávolság)

Ebben az egyenletben külső tájékozási elemek a $X_O, Y_O, Z_O, \varphi, \omega, \kappa$, melyekre, mint ismeretlenekre nézve, az (1) egyenlet nem lineáris.
Ekkor a megoldás jól ismert, szokásos menete a következő:

1. Ismeretlenek közelítő értékeinek megadása
2. Kollineár egyenletek sorba fejtése Taylor-polinom szerint
3. Egyenletrendszer felírása minden mért illesztő pont bevonásával
4. A felírt egyenletrendszer megoldása kiegyenlítéssel iteratív úton

* NYME Geoinfomatikai Főiskolai Kar, Fotogrammetriai és Távérzékelési Tanszék
8000 Székesfehérvár, Pirosalma u. 1-3., E-mail: t.jancso@geo.info.hu

Ezzel a megoldással kapcsolatban két probléma merül fel:

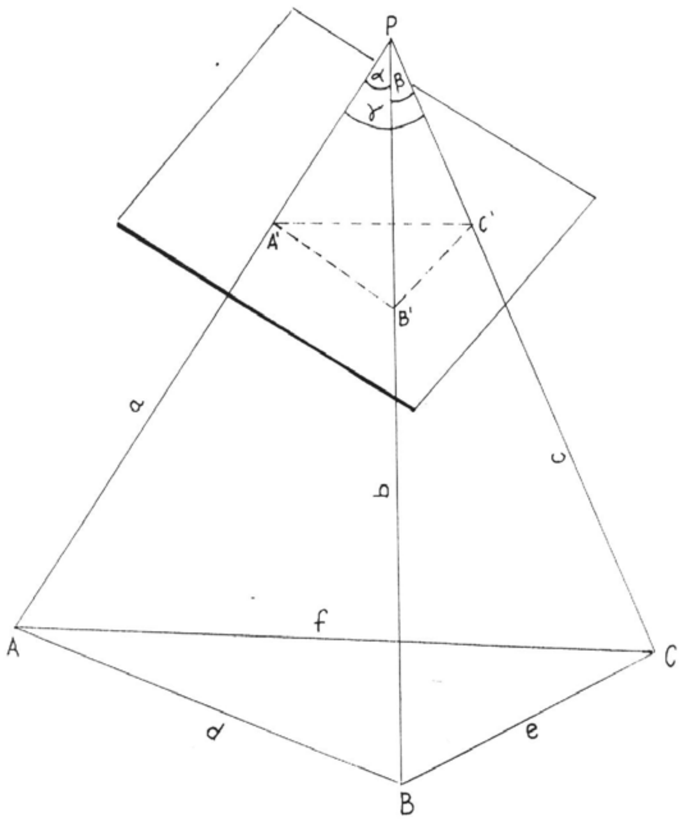
- Nem mindig adható meg az ismeretlenek előzetes értéke olyan pontosan, hogy az iteratív folyamat konvergáljon
- A durva hibával terhelt mérések vagy terepi koordináták nem szűrhetők ki hatékonyan, mivel a kiegyenlítés a legkisebb négyzetek módszere szerint történik, ami bizonyítottan elkeni és a hibamentes pontokra is szétosztja a hibát . Még a robosztus becslők sem alkalmazhatók minden esetben hatékonyan[6].

Jelen cikkben egy alternatív megoldást írok le, mely szerint a fenti két probléma már nem jelentkezik.

Direkt megoldás

Egy korábbi cikkemben [4] már foglalkoztam a fotogrammetriai hátrametszés direkt megoldásával. A külső tájékozási elemek meghatározását nem szükséges egy lépésben, egy egyenletből kiindulva megoldani. Célszerű először meghatározni a vetítési centrum koordinátáit (X_O, Y_O, Z_O), majd azután direkt képletek segítségével a φ, ω, κ forgatási szögeket.

A megoldásnál a hátrametszés geometriai elrendezéséből, a létrejövő tetraéder alakzatra felírható összefüggésekből indultam ki (1. ábra):



1. ábra

A vetítési centrum koordinátáinak közvetlen kiszámítása helyett számítsuk ki a tetraéder oldaléleit és csak ezután vezessük be a a centrum koordinátáit, mint ismeretleneket.

A rajz szerint kézenfekvően adódik, hogy mindegyik oldalalkotó háromszögére felírjuk a koszinusztételt:

$$d^2 = a^2 + (a \cdot n)^2 - 2a^2 n \cos\alpha$$
$$e^2 = (a \cdot n)^2 + (a \cdot m)^2 - 2a^2 nm \cos\beta \tag{2}$$
$$f^2 = (a \cdot m)^2 + a^2 - 2a^2 m \cos\gamma$$

Az így létrejött egyenletrendszert elegendő megoldanunk n-re. Ennek kiszámításához ezt az egyenletrendszert át tudjuk alakítani egy negyedfokú egyenletté. A negyedfokú egyenlet megoldására 4 értéket kapunk, melyek közül csak a pozitív értékeket tekintjük valódi megoldásnak, hasonló megállapítás "a","b","c" és "m" ismeretlenekre is érvényes. Visszatérve az (2) egyenletekhez "a" kifejezhető az első egyenletből :

$$a = +\sqrt{\frac{d^2}{1 + n^2 - 2n\cos\alpha}} \tag{3}$$

Ezek után a tetraéder "b" és "c" oldaléle már egyszerűen kifejezhető :

$$b = a \cdot n$$
$$c = a \cdot m = \frac{e^2 - f^2 + a^2 - b^2}{2(a\cos\gamma - b\cos\beta)} \tag{4}$$

Tehát meghatároztuk a tetraéder oldaléleinek hosszát, melyre legfeljebb négy különálló megoldás-csoportot kaphatunk. Most már bevezethetjük a vetítési centrum koordinátáit, mint ismeretleneket. Ehhez írjuk fel az oldalélekre a koordinátageometriából jól ismert távolságképleteket:

$$a^2 = (X_P - X_A)^2 + (Y_P - Y_A)^2 + (Z_P - Z_A)^2$$
$$b^2 = (X_P - X_B)^2 + (Y_P - Y_B)^2 + (Z_P - Z_B)^2 \tag{5}$$
$$c^2 = (X_P - X_C)^2 + (Y_P - Y_C)^2 + (Z_P - Z_C)^2$$

Ez az egyenletrendszer is másodfokú Xp,Yp és Zp ismeretlenekre, de ez már közvetlenül megoldható. A megoldáshoz vezessük be a következő jelöléseket:

$$
\begin{gathered}
c_1 = X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2 \;\; ; \; c_2 = X_B^2 + Y_B^2 + Z_B^2 \; ; \; c_3 = X_C^2 + Y_C^2 + Z_C^2 \, ; \\
c_4 = b^2 - a^2 + c_1 - c_2 \; ; \; c_5 = c^2 - a^2 + c_1 - c_3 ; \\
t_1 = 2(X_A - X_B) \; ; \; t_2 = 2(Y_A - Y_B) \; ; t_3 = 2(Z_A - Z_B) ; \\
t_4 = 2(X_A - X_C) \; ; t_5 = 2(Y_A - Y_C) \; ; t_6 = 2(Z_A - Z_C) ; \\
k_1 = (c_5 t_2 - t_5 c_4)/(t_4 t_2 - t_5 t_1) \; ; \; k_2 = (t_6 t_2 - t_5 t_3)/(t_4 t_2 - t_5 t_1) ; \\
k_3 = (c_5 t_1 - t_4 c_4)/(t_5 t_1 - t_4 t_2) \; ; k_4 = (t_6 t_1 - t_4 t_3)/(t_5 t_1 - t_4 t_2) ;
\end{gathered}
\tag{6}
$$

$$
\begin{gathered}
u_a = 1 + k_2^2 + k_4^2 ; \\
v_a = 2(k_2 X_A + k_4 Y_A - k_1 k_2 - k_3 k_4 - Z_A); w_a = c_1 - a^2 + k_1^2 + k_3^2 - 2(k_1 X_A + k_3 Y_A); \\
u_b = 1 + k_2^2 + k_4^2 ; \\
v_b = 2(k_2 X_B + k_4 Y_B - k_1 k_2 - k_3 k_4 - Z_B); w_b = c_2 - b^2 + k_1^2 + k_3^2 - 2(k_1 X_B + k_3 Y_B); \\
u_c = 1 + k_2^2 + k_4^2 ; \\
v_a = 2(k_2 X_C + k_4 Y_C - k_1 k_2 - k_3 k_4 - Z_C); w_c = c_3 - c^2 + k_1^2 + k_3^2 - 2(k_1 X_C + k_3 Y_C).
\end{gathered}
$$

Ekkor a megoldás :

$$
\begin{gathered}
Z_P = \frac{-v_a \pm \sqrt{v_a^2 - 4u_a w_a}}{2u_a} = \frac{-v_b \pm \sqrt{v_b^2 - 4u_b w_b}}{2u_b} = \frac{-v_c \pm \sqrt{v_c^2 - 4u_c w_c}}{2u_c} ; Z_P > 0 \\
X_P = k_1 - k_2 Z_P \\
Y_P = k_3 - k_4 Z_P
\end{gathered}
\tag{7}
$$

Összességében a megoldással kapcsolatban a következőket állapíthatjuk meg a vetítési centrum helyét illetően:

- Három illesztő pont esetén a lehetséges megoldások száma általános esetben több, mint egy, de legfeljebb csak nyolc lehet geometriai értelemben, ellentétben Merrit által írtakkal [5]. Fotogrammetriai szempontból a tetraéder alatti terület nem értelmezhető megoldásnak. (Valójában ez előfordulhat, mert tükrözéssel minden valós megoldásnak van párja, de a tetraéder alatti területet teljesen kizárhatjuk a megoldástérből.)
- Az egyértelmű megoldáshoz legalább 4 illesztő pontra van szükség, három nem elég, legalábbis csak a legritkább esetben fordul elő, hogy három illesztő pont alapján csak egy megoldás adódik.

Folytatva a tájékozási elemek meghatározását φ, ω, κ szögelemek kiszámítása legegyszerűbben a jól ismert [3] algoritmus szerint történhet.

Ezzel megállapíthatjuk, hogy a hátrametszés feladatát megoldottuk anélkül, hogy kezdőértékeket kellett volna megadni.

Kiegyenlítés és durva hibaszűrés

Ezek után nézzük meg hogyan alakítható át e módszer abban az esetben, ha a rendelkezésre álló illesztő pontok száma háromnál több, vagyis az ismeretlenek meghatározása kiegyenlítéssel történik.

A vetítési középpontok kiegyenlített helyzetének meghatározásánál célunk az is, hogy kiejtsük a kis- és közepes durva hibával terhelt illesztő pontokat, ill. a hozzájuk tartozó képkoordináta méréseket.

A kiegyenlítési és durvahiba szűrési algoritmus

1. Adott n db terepi illesztő pont, ezekből minden kombinációban hármas csoportokat hozunk létre és megoldjuk a fent leírtak szerint fotogrammetriai hátrametszés feladatát [4]. Minden hármas csoportnál általános esetben a vetítési középpont koordinátáira egynél több megoldást fogunk kapni.
2. Minden megoldáscsoportból kiválasztjuk a közös megoldásokat, vagyis azokat, melyek szerint a megoldások közötti eltérések, melyeket javításnak tekintünk, négyzetösszege minimális.

Például, ha 4 db illesztő pontunk van, akkor az 1. és 2. Pontok szerint eljárva 4 vetítési középpontot kapunk, melyek csak kis mértékben térnek el egymástól.

A vetítési középpont kiegyenlített helyzetének meghatározásához használjuk a Jacobi-féle középértékképzést, mely bizonyítottan azonos eredményt szolgáltat a legkisebb négyzetek módszerével [2]. Ehhez a középértékképzéshez szükségünk van a megoldásokhoz tartozó súlymátrixokra, melyeket a következő módunk hozhatunk létre:

3. A hibaterjedés törvénye szerint minden megoldáshoz kiszámítjuk a kovariancia mátrixot:

$$M_y = F^T M_x F \tag{8}$$

M_x : az illesztő pontok geodéziai méréssel történő meghatározásánál figyelembe vett kovariancia mátrix.

Az F^T mátrixot empirikus úton, $dx_i, dy_i\ i = \{1,2,3\}$ elemi differenciák segítségével kaphatjuk meg. Az elemi növekményt egyenként hozzáadjuk mindegyik képkoordinátához és újra elvégezzünk a hátrametszést az 1. és 2. pontok szerint. A kapott megoldásokat kivonva az eredeti megoldásokból, megkapjuk az F^T mátrix egyes elemeit.

Tehát F^T egy 3x6-os méretű differencia hányados mátrix lesz, mely jól közelíti a parciális deriváltakat tartalmazó mátrixot:

$$F^T = \begin{bmatrix} \frac{\Delta f_X}{\Delta x_1} & \frac{\Delta f_X}{\Delta y_1} & \frac{\Delta f_X}{\Delta x_2} & \frac{\Delta f_X}{\Delta y_2} & \frac{\Delta f_X}{\Delta x_3} & \frac{\Delta f_X}{\Delta y_3} \\ \frac{\Delta f_Y}{\partial x_1} & \frac{\Delta f_Y}{\partial y_1} & \frac{\Delta f_Y}{\partial x_2} & \frac{\Delta f_Y}{\partial y_2} & \frac{\Delta f_Y}{\partial x_3} & \frac{\Delta f_Y}{\partial y_3} \\ \frac{\Delta f_Z}{\Delta x_1} & \frac{\Delta f_Z}{\Delta y_1} & \frac{\Delta f_Z}{\Delta x_2} & \frac{\Delta f_Z}{\Delta y_2} & \frac{\Delta f_Z}{\Delta x_3} & \frac{\Delta f_Z}{\Delta y_3} \end{bmatrix} \tag{9}$$

ahol f_X, f_Y, f_Z a vetítési középpont koordinátáinak kiszámításhoz szükséges algoritmus [4] szerint értelmezett függvényeket jelöli, mely zárt alakban nem írható fel.

Példánk szerint 4 db M_y kovariancia mátrixot kapunk, melyek mérete 3x3. Ezek alapján a P súlymátrix a következőképpen fejezhető ki:

$$P = Q^{-1} = c^2 \left(M_y\right)^{-1} \tag{10}$$

ahol c egy arányossági tényező, jelen esetben értéke legyen 1/1000.

4. Kiegyenlítés

Az elmondottak szerint a megoldáshoz alkalmazzuk a Jacobi-féle középértékképzést, mely a legkisebb négyzetek módszerével azonos eredményt szolgáltat [2]:

1. $P_i = c^2 M_{y_i}^{-1}$, ahol a példánk szerint $i = 1,2,3,4$ a minden kombinációban elvégzett hátrametszés sorszámát jelöli.

2. Ekkor a tisztatag vektorokat minden i -ik hátrametszéshez külön-külön képezzük:

$$L_i = \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} \tag{11}$$

3. A kiegyenlített koordinátákat a súlyozott középérték szolgáltatja:

$$X = \left(\sum P_i\right)^{-1} \times \sum \left(P_i L_i\right) \tag{12}$$

$$X = Q_{xx} \times \sum \left(P_i L_i\right)$$

4. A javításvektort számítása:

$$V_i = X - L_i, \text{ ahol } V_i = \begin{bmatrix} v_{x_i} \\ v_{y_i} \\ v_{z_i} \end{bmatrix} \tag{13}$$

5. Ezután már kiszámítható a súlyegység középhibája és az ismeretlenekhez tartozó középhibák:

$$m_0 = \sqrt{\frac{\sum \left(V_i^T P_i V_i\right)}{3n - 3}} \tag{14}$$

,ahol n a kiegyenlítésbe bevont illesztő pontok számát jelöli

$$\left.\begin{aligned} m_X &= m_0 \cdot \sqrt{q_{xx}^{1,1}} \\ m_Y &= m_0 \cdot \sqrt{q_{xx}^{2,2}} \\ m_Z &= m_0 \cdot \sqrt{q_{xx}^{3,3}} \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

A durva hibaszűrés elvégzésének lépései:

A kiegyenlítés végén megkapjuk a kiegyenlített ismeretlenek m_X, m_Y, m_Z középhibáit az m_0 és a Q_{xx} mátrix segítségével. Ezeket a középhibákat a kiegyenlítés előtt becsülni is tudjuk:

$$\begin{aligned} \tilde{m}_X &= \sqrt{\frac{\sum\left(M_{y_i}^{1,1} \times P_i^{1,1}\right)}{\sum P_i^{1,1}}} \\ \tilde{m}_Y &= \sqrt{\frac{\sum\left(M_{y_i}^{2,2} \times P_i^{2,2}\right)}{\sum P_i^{2,2}}} \\ \tilde{m}_Z &= \sqrt{\frac{\sum\left(M_{y_i}^{3,3} \times P_i^{3,3}\right)}{\sum P_i^{3,3}}} \end{aligned} \tag{16}$$

Jelölések:

$M_{y_i}^{1,1}$: az i-ik M_y mátrix 1,1 átlós eleme

$P_i^{1,1}$: az i-ik P súlymátrix 1,1 átlós eleme

A hátrametszést akkor nem terheli durva hiba, ha kiegyenlítés után kapott ismeretlenek középhibái kisebbek a becsült értéknél. Ha a kiegyenlítéskor kapott középhibák nagyobbak a becsült középhibáknál, akkor a következők szerint járunk el:

Állítsuk fel a nullhipotézist két szórás összehasonlítására: $H_0 : \sigma_1 = 3.3\sigma_2$ (17)

A $p = 0.95\%$ valószínűségi szinten a szabadsági fok 3, így $F_{0.95(3,3)} = 9.28$ statisztika adódik [1]. Ezt a statisztikai értéket tekintsük teoretikus értéknek és jelöljük F_t-vel. Ugyanakkor az F értékét a következő képletek alapján koordinátánként számíthatjuk:

$$\begin{aligned} F_{sz_X} &= \frac{m_X^2}{\tilde{m}_X^2} \cdot \frac{1}{3.3^2} \\ F_{sz_Y} &= \frac{m_Y^2}{\tilde{m}_Y^2} \cdot \frac{1}{3.3^2} \\ F_{sz_Z} &= \frac{m_Z^2}{\tilde{m}_Z^2} \cdot \frac{1}{3.3^2} \end{aligned} \tag{18}$$

Tehát a hátrametszést akkor nem terheli durva hiba, ha együttesen igazak a következő feltételek:

$$\begin{aligned} F_{sz_X} &\le F_t \\ F_{sz_Y} &\le F_t \\ F_{sz_Z} &\le F_t \end{aligned} \tag{19}$$

Ellenkező esetben, a nullhipotézist el kell vetnünk és a hátrametszést durva hibával terheltnek kell tekintenünk.

Ha durva hiba terheli a hátrametszést, akkor a durva hibát tartalmazó pont kizárásos alapon kiválasztható. Ehhez a következőképpen járunk el:
n db illesztő pont esetén kiegyenlítéssel úgy tudjuk megoldani a feladatot, hogy minden kombinációban négyes pontcsoportokat hozunk létre és minden megoldásról eldöntjük, hogy durva hibával terhelt-e. Tehát a teljes kombinációk száma $\binom{n}{4} = \frac{n!}{(n-4)!\cdot 4!}$, vagyis ennyi alkalommal kell elvégezni 4 illesztő pont alapján a hátrametszést.

Példaként legyen az illesztő pontok száma 5. Ekkor a következő négyes csoportok hozhatók létre:

$\{1,2,3,4\}$ $\{1,2,3,5\}$ $\{1,2,4,5\}$ $\{1,3,4,5\}$ $\{2,3,4,5\}$

Tételezzük fel, hogy az 1-es számú illesztő pont durva hibával terhelt. Ekkor az öt hátrametszés csoport közül négy hibás lesz, mivel azokban szerepel az 1-es számú pont. Viszont a $\{2,3,4,5\}$ kombináció durva hibától mentes megoldást fog szolgáltatni. Így tehát egyértelműen eldönthető, hogy az 1-es pont tartalmazza a durva hibát. A kiválasztási algoritmus meggyorsítható azzal, hogy a négyes csoportokon belül elvégzett hátrametszések kiszámítását nem ismételjük meg, ha a felhasznált pontok egy másik négyes csoportban is szerepelnek.

A durva hibával terhelt pont kiszűrése után, már megismételhetjük a kiegyenlítés folyamatát, akár az itt ismertetett módon, akár a hagyományos iterációs eljárással a legkisebb négyzetek módszere szerint, hiszen biztosak lehetünk abban, hogy kiegyenlítés konvergálni fog mivel nem lesz durva hibával terhelt pont és az ismeretlenek kezdő értékei szinte megegyeznek a pontos értékekkel.

A forgatási mátrix meghatározása kiegyenlítéssel

A külső tájékozási elemek meghatározásához hozzá tartozik a képsík tájékozását meghatározó φ, ω, κ forgatási szögek meghatározása is. Miután megkaptuk a vetítési középpontok kiegyenlített koordinátáit, a forgatási szögek kiegyenlített értékeit már jól ismert algoritmus szerint számíthatjuk [3].

Ezek után kövessük végig egy számpéldán a teljes folyamatot. A kiinduló adatokat az 1. táblázatban adjuk meg:

```
Ck=75.00
Pontok száma: 4

Psz    x          y             X          Y          Z
--------------------------------------------------------
11  -14.99085   71.32913      0.200  1400.000     0.200
12   40.44218   71.30058    550.000  1400.000     3.000
27  -14.34352  -68.94081      0.200     1.200     0.200
28   40.35546  -68.87416    550.000     0.200     6.000
```

Hibás pont: 27 $\varepsilon_Y = +1.0\,\mathrm{m}$ (egyértelmű durva hiba)

1. táblázat

Az (7) képletek felhasználásával a hátrametszés megoldásait minden kombinációban a 2. táblázat tartalmazza:

	11-12-27	**11-12-28**	**11-27-28**	**12-27-28**
x1	37.5073012819	1.0652233597	0.9992761608	0.9380892013
x2	-2.9286934357	0.6852508069	0.8682375245	0.3984374663
x3	1.2434822404	0.0176218316	0.0111272638	-0.3630822110
x4	1.0653330967	0.0612495039	0.0105490871	-0.9802293460
Xp	-12.786	140.000	138.492	138.705
Xp	-12.709	147.614	154.273	154.503
Xp	139.795	558.489	-12.618	558.580
Xp	147.419	558.536	-12.462	558.679
Yp	1401.127	700.000	700.046	700.590
Yp	1401.127	696.795	700.046	697.380
Yp	699.522	1401.840	0.089	-1.646
Yp	699.522	1401.821	0.089	-1.666
Zp	7.634	750.000	749.725	749.286
Zp	-7.366	-745.130	-746.241	-748.789
Zp	749.483	7.621	7.451	10.759
Zp	-747.622	-1.542	-7.320	1.431
n	37.507301	1.065223	0.999276	0.938089
n	37.507301	1.065223	0.999276	0.938089
n	1.065333	0.017622	0.010549	0.398437
n	1.065333	0.017622	0.010549	0.398437
m	93.301223	1.063139	1.063977	0.998725
m	93.301223	1.063139	1.063977	0.998725
m	0.998592	2.510410	0.401875	0.007123
m	0.998592	2.510410	0.401875	0.007123

Jelölések:

X1,x2,x3,x4 : negyedfokú egyenlet gyökei
Xp,Yp,Zp : vetítési középpont koordinátái
n,m : méretarány tényezők

2. táblázat

A megoldások közül kiválasztjuk azokat, melyek szerint a megoldások közötti eltérések, melyeket javításnak tekintünk, négyzetösszege minimális:

```
1 xp=   139.795 yp=   699.522 zp=   749.483
2 xp=   140.000 yp=   700.000 zp=   750.000
3 xp=   138.492 yp=   700.046 zp=   749.725
4 xp=   138.705 yp=   700.590 zp=   749.286
```

Minden megoldáshoz tartozó F mátrixot, a (8) szerint számítva, a 3. táblázat tartalmazza:

```
Elemi növekmény: 0.005 mm


1
  0.0025   0.0148  -0.0027  -0.0128   0.0025   0.0148
  0.0292   0.0005  -0.0248   0.0143   0.0292   0.0005
  0.0005   0.0027   0.0005   0.0024   0.0005   0.0027

 2
 -0.0075   0.0127   0.0074  -0.0185  -0.0075   0.0127
  0.0279   0.0058  -0.0275   0.0102   0.0279   0.0058
 -0.0041   0.0070   0.0014  -0.0034  -0.0041   0.0070

 3
  0.0100   0.0021   0.0026  -0.0153   0.0100   0.0021
  0.0046  -0.0046  -0.0296   0.0003   0.0046  -0.0046
 -0.0009   0.0051   0.0005  -0.0028  -0.0009   0.0051

 4
  0.0100  -0.0058  -0.0075  -0.0132   0.0100  -0.0058
  0.0006  -0.0060  -0.0283   0.0058   0.0006  -0.0060
  0.0028   0.0036  -0.0041  -0.0073   0.0028   0.0036
```

3. táblázat

A megoldásokhoz tartozó súlymátrixok elemeit (10) szerint számítva a 4. táblázat tartalmazza:

```
1
  0.0020  0.0001 -0.0050
  0.0001  0.0004 -0.0013
 -0.0050 -0.0013  0.0630
 2
  0.0069  0.0006 -0.0139
  0.0006  0.0005 -0.0005
 -0.0139 -0.0005  0.0361
 3
  0.0024 -0.0001 -0.0020
 -0.0001  0.0011  0.0014
 -0.0020  0.0014  0.0197
 4
  0.0035 -0.0007 -0.0042
 -0.0007  0.0012  0.0005
 -0.0042  0.0005  0.0140
```

4. táblázat

A vetítési középpont kiegyenlített koordinátáira (12) szerint a következő értékeket kapjuk:

```
xp=   139.009 m
yp=   700.449 m
zp=   749.530 m
```

A súlyegység középhibája (14) szerint számítva mo = 0.025 értéknek adódik.

Az ismeretlenekhez tartozó középhibák (15) szerint számítva:

```
mx= 0.252 m
my= 0.438 m
mz= 0.084 m
```

Az ismeretlenekhez tartozó középhibák a kiegyenlítés előtt becsléssel (16) szerint számíthatjuk:

```
mx~=   0.025 m
my~=   0.037 m
mz~=   0.008 m
```

A nullhipotézis (17) szerint felállított statisztikai értékre Ft=9.28 adódik.

F statisztikai értékeire koordinátánként (18) szerint ugyanakkor számítással a következő értékeket kapjuk:

```
Fx=        8.84 < Ft
Fy=       12.81 > Ft
Fz=        9.31 > Ft
```

Következtetésként megállapíthatjuk, hogy az Y és Z koordinátánál nem teljesült a nullhipotézis, tehát a kiegyenlítést durva hiba terheli.

Összefoglalás:

Jelen cikk alternatív megoldást ad egy közvetlen, analitikus módszerrel végzett kiegyenlítési eljárásra. Bizonyítható, hogy az ily módon végzett kiegyenlítés végeredménye egyenértékű a legkisebb négyzetek módszerével kapott értékekkel.

A módszere hátrányának tekinthető a kombinatorikai robbanásból adódó nagy számításigény, melyet viszont további kutatások során remélhetőleg egy optimalizált algoritmussal minimálisra lehet majd csökkenteni.

Irodalom

1. Detrekői Á.: Kiegyenlítő számítások, Tankönyvkiadó, Budapest, 1991.
2. Gleinsvik, P.:The generalisation of the theorem of Jacobi. = Buletin Geodesique (1967), 85. évf. 269-80. old.
3. Hirvonen, R.A.:General formulas for the analytical treatment of the problems of photogrammetry =Suomen Fotogrammetrinen Seura, Helsinki, Eripainos, Maamittans no: 3-4. 1964.
4. Jancsó, T.:A külső tájékozási elemek meghatározása közvetlen analitikus módszerrel = Geodézia és Kartográfia, 1994. 46.. évf. 1. Szám 33-38. Old.
5. Merrit, E.L.: Analiticseszkaja fotogrammetria, Moszkva, 1961. 70-79. old.
6. Závoti J.: A geodézia korszerű matematikai módszerei = Geomatikai Közlemények II. szám, doktori disszertáció, Sopron, 1999.